1932 № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

И. М. Виноградов. О числе целых точек внутри круга.
ИМЕН, 1932, № 3, стр. 313.

I. Vinogradov. Sur le nombre des points entiers à l'intérieur d'un cercle.
BAS-MN, 1932, № 3, p. 313 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Апрель 1932 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волпин*

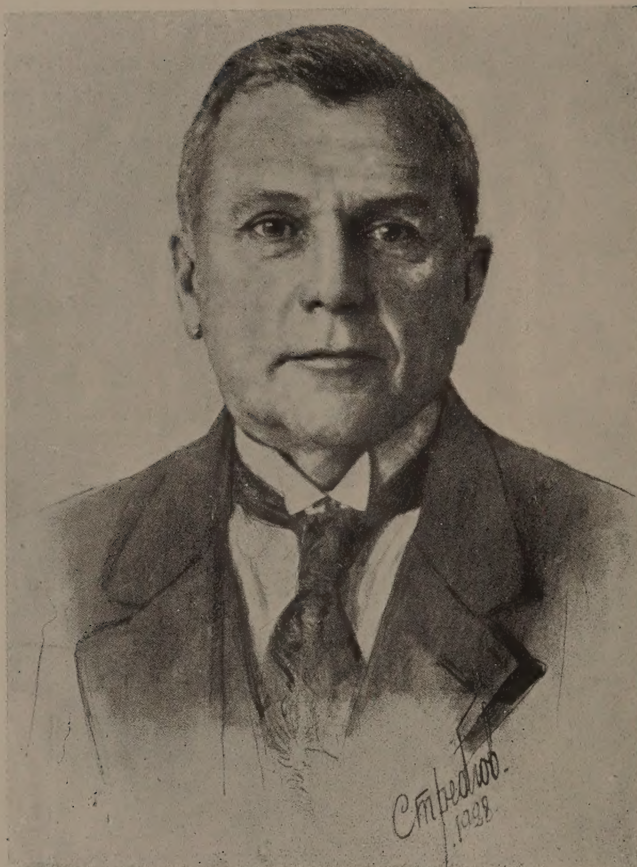
Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор Г. А. Стратановский

Сдано в набор в феврале 1932 г. — Подписано к печати 10 апреля 1932 г.

132 (287—418) стр. (2 фиг.) + 1 табл. — 72 × 110 см. — $8^{6}/_{8}$ печ. л. —
42000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 1300
Ленгорлит № 39540. — АНИ № 112. — Заказ № 681
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12



С. Костычев

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ КОСТЫЧЕВ

(1877—1931)

НЕКРОЛОГ

Составлен Г. А. Надсоном, Н. Н. Ивановым, М. П. Корсаковой и С. Д. Львовым[1]

Сергей Павлович Костычев родился 26 апреля 1877 г. Его детство и годы ранней юности прошли в очень благоприятной обстановке. Отец его, Павел Андреевич Костычев, профессор почвоведения в СПб. Лесном институте, был выдающимся ученым и крупным общественным деятелем в области сельского хозяйства. Человек широко образованный и с инициативой, он не только понял и оценил то значение, которое может иметь микробиология для сельского хозяйства, но и сам одно время, по его словам «почти исключительно занимался бактериями — болезнетворными по преимуществу — а также и другими со стороны их физиологических свойств».

Не менее выдающейся личностью была и мать С. П. По словам одного из современников (В. Оболенский) она была «одной из образованнейших женщин своего времени» и до своей смерти сохранила «свой живой ум, неподражаемый, чисто щедринский юмор и красочную образность рассказа».

Кто знал С. П. Костычева, тот не мог не заметить этих выдающихся черт наследственности со стороны родителей.

По окончании гимназии, С. П. поступил в СПб. университет на физико-математический факультет по отделению естественных наук. Он окончил его в 1900 г. и был оставлен при университете для приготовления к профессорской деятельности по кафедре ботаники. В 1902—1903 гг. С. П. был командирован заграницу для усовершенствования и с увлечением работал

[1] Под общей редакцией акад. Г. А. Надсона. — Биографический очерк — Г. А. Надсон (стр. 287); о работах С. П. по изучению дыхания у растений — Н. Н. Иванов (стр. 290); явлений брожения и фотосинтеза — С. Д. Львов (стр. 292); микробиологии почвы и бродильных процессов — М. П. Корсакова (стр. 301); список печатных научных трудов С. П. — М. В. Афанасьева (стр. 306).

в химико-физиологических лабораториях Э. Шульце в Цюрихе и А. Косселя в Гейдельберге. В противоположность многим ученым С. П. сразу нашел себя, сразу и на всегда определился: он стал биохимиком и ботаником-физиологом. В этом же направлении большое влияние оказал на него впоследствии проф. В. И. Палладин, с которым он долго совместно работал.

В дальнейшем жизненный путь С. П. был подобен пути многих крупных ученых: он не был богат чрезвычайными внешними событиями, но был очень богат внутренним содержанием. Внешне путь шел обычной для ученых колеей и притом почти целиком в Петербурге, потом Ленинграде.

В 1903 г. С. П. становится ассистентом при кафедре ботаники (у проф. В. К. Варлиха) в Военно-Медицинской академии. В 1907 г. по защите диссертации «Исследования над анаэробным дыханием растений» он получает степень магистра ботаники и начинает чтение лекций в университете в качестве приват-доцента.

В 1911 г. он получил степень доктора ботаники (диссертация: «Физиолого-химические исследования над дыханием растений») и в том же году утвержден профессором ботаники на СПб. Высших женских курсах.

В 1914 г. он экстраординарный, а в 1916 г. ординарный профессор анатомии и физиологии растений в СПб. университете и сохраняет там должность профессора до своей смерти. Довольно продожительное время (1910—1926) он был также профессором ботаники в Технологическом институте.

В 1922 г. Академия Наук избрала С. П. свои членом-корреспондентом, а в следующем году и действительным членом по кафедре ботаники и директором Лаборатории анатомии и физиологии растений. Это была маленькая лаборатория, основанная еще в 1889 г. академиком А. С. Фаминцыным, с очен скромными средствами. С. П. — и это одна из больших заслуг его — превратил ее в обширный, превосходно оборудованный научно-исследовательский Институт с новым наименованием «Лаборатория биохимии и физиологии растений» (ЛАБИФР) и четко установленной основной задачей: «широкая постановка изучения биохимических и физиологических процессов, происходящих в растениях».

Будучи глубоким исследователем в области научной теории, С. П. отнюдь не терял из вида запросов практики в области сельского хозяйства и промышленности, поскольку они соприкасались с его специальностью. Еще в 1918 г. он был зачислен членом-консультантом по отделу бактериологии Сельскохозяйственного ученого комитета (потом Гос. Инст. опытной агрономии). В 1923 г. он был избран там заведывающим Отделом

микробиологии, который он постепенно развил, реорганизовал с большим умением и энергией и превратил в обширный, ныне существующий Всесоюзный институт сельскохозяйственной микробиологии, входящей в состав Академии сельскохозяйственных наук им. В. И. Ленина.

Вообще С. П. был не только крупнейшим ученым, но и выдающимся организатором. Это сказалось и в другой области его работ. Так в 1920 г. для продолжения и расширения своих работ в Ленинградском университете С. П. организовал ботанико-физиологическую лабораторию в Новом Петергофе, и здесь им и его учениками было произведено много работ, главным образом по фотосинтезу. В связи с этим был целый ряд работ, проведенных в экспедиционном порядке и во временных лабораториях в различных местах — от дальнего севера (Мурман) до дальнего юга (Крым, Сухум, Батум, Ташкент и др.). Кроме вопросов фотосинтеза там разрабатывались также важные проблемы сельскохозяйственной микробиологии.

С. П. работал до последних дней своей жизни.

21 августа 1931 г. он скоропостижно скончался (болезнь сердца) в Крыму, в Алуште и там погребен.

Как видно из вышеизложенного и как это еще яснее, еще ярче выступит из дальнейшего, в лице безвременно скончавшегося С. П. Костычева наука потеряла одного из крупнейших современных ботаников-физиологов, талантливого исследователя, выдающегося организатора и превосходного учителя. Характерными чертами С. П. было умение широко охватить проблему, выбрать надлежащую методику и критически-углубленно поставить исследование. Он часто шел своими, не проторенными другими путями; часто бывал смел в постановке вопросов и не колебался, когда считал нужным, итти против казалось прочных и общепризнанных устоев науки.

С. П. был полон увлечения теми научными вопросами, которые его интересовали и которые он разрабатывал. Он увлекался сам и увлекал других на путь научной работы; потому он и был превосходным учителем.

Смерть С. П. тяжелая утрата для науки. На оставшихся лежит долг обеспечить дальнейшее продвижение науки по тому пути, по которому так успешно шел покойный и прежде всего, конечно, в тех лабораториях, где он работал.[1]

[1] Ленинградский гос. университет, Академия Наук СССР и Институт сельскохоз. микробиологии ВАСХНИЛ посвятили 10 декабря 1931 г. памяти С. П. Костычева особое траурное заседание. Краткие некрологи С. П. появились в журн. «Природа», 1931, № 8 (проф. Н. Н. Иванова) и в «Вестнике Академии Наук», 1931, № 8 (М. П. Корсаковой).

С. П. оставил много печатных научных трудов, включая прекрасное руководство по физиологии растений; здесь, конечно, можно коснуться только главнейших.

Первый период своей деятельности до 1910 г. С. П., если не считать очень ценной работы в лаборатории А. Косселя по химии нуклеиновой кислоты, посвящает глубокому изучению энергетических процессов главным образом у высших растений. Большим итогом первых исследований в этой области явилась его магистерская диссертация в 1907 г. «Исследования над анаэробным дыханием растений».

Физиолог Пфлюгер в 1875 г. высказал теорию, что у животных между нормальным и анаэробных дыханием существует генетическая связь, и что кислородное дыхание происходит в 2 фазы: сначала образуются легко окисляемые тела, а затем кислород воздуха устремляется на эти легко окисляемые вещества и сжигает их окончательно. Еще до Пастера, который впервые установил понятие об анаэробном дыхании, факт образования растениями углекислоты и спирта в бескислородной среде был хорошо известен ряду исследователей. Пфефером и его учеником Дьяконовым энергетические процессы дыхания высших растений объяснялись несколько упрощенно; их теория трактовала анаэробное дыхание, как спиртовое брожение, которое начинается при недостатке кислорода и прекращается при возобновлении воздуха. С. П. Костычев в своей работе 1907 г. поставил десятки остроумных опытов, где использовал свои способности блестящего экспериментатора, где широко воспользовался методами химии и газового анализа для тонкого проникновения в дыхательный процесс. Он доказал, что анаэробное дыхание плесневых грибов возможно и при питании пептоном, хинной и винной кислотой. Из его опытов вытекало, что необходимо строго различать неспособность дышать в бескислородной среде за счет определенных веществ и скорость отравления продуктами анаэробиоза. Благодаря неучету последнего обстоятельства С. П. опровергает данные Дьяконова и считает, что генетическая связь анаэробного и нормального дыхания не может оспариваться. Благодаря прояснению горизонта в этой области и большому экспериментальному материалу, представленному С. П., рабочая теория о генетической связи дала возможность сопоставить весь фактический материал по анаэробному дыханию в одно целое.

Вторая диссертация С. П. «Физиолого-химические исследования над дыханием растений» вышла в 1910 г.; она посвящена проблеме тех слож-

ных физиолого-химических превращений, которые происходят при дыхании растений. Задача была в высшей степени трудной, так как вопросы физиологического окисления были тогда мало разработаны. В этом труде С. П. разобрал все теории медленного окисления в клетке и на основании своих данных присоединился к теории Баха-Энглера. Прежде всего надлежало выяснить, какие вещества подвергаются окислению, происходит ли при дыхании непосредственное окисление углеводов или последние участвуют в дыхании косвенным образом путем регенерации живых белков, как этого требовала теория Детмера. На этот вопрос С. П. отвечает вполне определенно: углеводы окисляются непосредственно и «белковая» теория дыхания растений должна быть раз навсегда вычеркнута из современного учения о дыхании. В этой работе С. П. осветил роль спирта в процессе дыхания. Приводя большую литературу и свои опыты С. П. приходит к выводу, что спирт не является промежуточным продуктом при окислении сахара; он является побочным продуктом дыхания и при нормальном ходе окислительных процессов вовсе не образуется, так как окислению подвергается не спирт, а нестойкие промежуточные продукты спиртового брожения, которые только в отсутствии кислорода переходят в этиловый спирт, но при наличности молекулярного кислорода окисляются до конца. С. П. пользуются промежуточными продуктами спиртового брожения, которые окисляется до углекислоты не только в присутсвии перекиси водорода и соли железа, но также и растительной пероксидазой. Этими опытами С. П. удалось воспроизвести in vitro условия окисления, близкие к происходящим к живой растительной клетке. Здесь же точными опытами с газовым анализом он опровергает данные Мюнца, который утверждал, что при дыхании шампиньонов за счет маннита выделяется водород; С. П. объяснил, что если в длительных опытах и происходит его образование, то исключительно за счет бактерий. Особенно интересно, что в соке шампиньонов ему удалось доказать выделение углекислоты при распадении каких-то нестойких веществ, причем это выделение углекислоты продолжалось и при кипячении, т. е. являлось не биологическим процессом. Это явление нашло объяснение только позднее в работе Н. Н. Иванова, который показал, что шампиньон накапливает до 13% мочевины, считая на сухой вес, и высказал взгляд, что эта углекислота в опыте С. П. мочевинного происхождения. Таким образом, этими основными работами С. П. подошел к объяснению механизма физиологического окисления, считая, однако, что его опыты в этой трудной области являются пионерскими.

В дальнейшей своей деятельности С. П. еще несколько раз возвращался к проблеме дыхания и совместно с М. В. Афанасьевой[1] высказал гипотезу, что если плесневым грибам давать в качестве дыхательного материала винную кислоту, молочную кислоту, маннит, хинную кислоту и т. д., то эти безазотистые вещества сперва превращаются в глюкозу, которая затем уже сгорает в процессе дыхания; если же давать пептон, то образования глюкозы не наблюдалось, но в таком грибе отсутствовала и зимаза, так как гриб, поставленный в анаэробные условия, не образовал спирта.

Выводы С. П. о промежуточных продуктах дыхания обычно принимаются в литературе; только по отношению к образованию глюкозы за счет безазотистых продуктов были сделаны возражения В. С. Буткевичем.

Исследования над дыханием растений, которыми был заполнен первый период научной деятельности С. П., привели его к твердому убеждению о наличии глубокой генетической связи между процессами дыхания и спиртового брожения. Особое значение он придавал своим опытам над стимуляцией дыхания растворами «недоброженного» сахара, т. е. уже испытавшего на себе воздействие дрожжей, но еще «недобродившего», т. е. в своем внутримолекулярном преобразовании еще не дошедшего до конечных продуктов брожения — спирта и CO_2. В таких «недоброженных» растворах, по мысли С. П., нужно ожидать накопления промежуточных продуктов с биохимически расшатанной молекулой, легко поддающейся дальнейшим превращениям — и притом в различных направлениях — как в сторону собственно брожения (до спирта), так и в сторону полного окисления (при дыхании). Наличием таких нестойких продуктов и объясняется, почему «недоброженные» растворы сахара в столь сильной степени повышают энергию дыхания.

Эти промежуточные продукты являются общими для дыхания и брожения. Иначе говоря, начальные фазы преобразования сахара при дыхании будут те же, как и при брожении. Чтобы уяснить химизм дыхания, мы должны сначала изучить химизм брожения. Естественным результатом такого круга умозаключений является поворот интересов исследователя в сторону изучения химизма бродильных процессов, в первую очередь спиртового. И, действительно, уже начиная с 1912 г. С. П. почти целиком отдается изучению спиртового брожения.

[1] С. П. Костычев и М. В. Афанасьева. Журн. Русск. бот. общ. т. 2, 77, 1917.—Jahrb. f. wiss. Bot. Bd., 60, 628, 1921.

Основные результаты его многолетней работы в этой области изложены им в 20 статьях, вышедших в свет в период с 1912 по 1930 г. под общим заглавием «Über die Alkoholgärung». Несколько статей, посвященных более детальному изучению отдельных вопросов, появились и вне этого цикла.

Работы С. П. по спиртовому брожению, в общем и целом, посвящены изучению двух больших проблем: во-первых, изучению внутреннего химизма спиртового брожения и, во-вторых, решительной и принципиальной ревизии учения о внеклеточном брожении.

Его исследования над химизмом спиртового брожения были начаты им в тот период, когда только что обнаружилась полная несостоятельность первых упрощенных схем по химизму брожения (теория Бухнера — через молочную кислоту, теория Бойсен-Иенсена — через диоксиацетон). Было ясно, что химизм брожения отличается бблышей сложностью, чем предполагали раньше, и что нужно искать новых внутренних факторов брожения, ускользавших до сих пор от внимания исследователей. И С. П., только что повернувшись от вопросов дыхания к новой для него проблеме брожения, быстро ориентировался в чрезвычайно сложном и запутанном лабиринте фактов бродильной химии и, как крупный научный талант, обладая даром научной прозорливости, сразу же поймал верную нить, связав бродильный процесс с явлениями восстановления, которые, хотя и давно были известны по отношению к дрожжам, но рассматривались обычно сами по себе, независимо от акта брожения.

Идея об этой связи между явлениями брожения и редукции высказывалась, правда, в то время и другими исследователями, но С. П. один из первых облек эту идею в форму отчетливой конкретной химической схемы, с которой он и выступил в первых же своих статьях по спиртовому брожению. В основе она удержалась до настоящего времени и фигурирует, на ряду с аналогичной ей схемой Нейберга, во всех современных руководствах по физиологии растений.

Под действием важнейшего фермента дрожжей редуктазы молекула сахара распадается на 2 молекулы пировиноградной кислоты с отщеплением 4 атомов водорода, активируемых редуктазой. Пировиноградная кислота под действием открытой Нейбергом карбоксилазы расщепляется на CO_2 и уксусный альдегид, а последний немедленно под действием той же редуктазы восстанавливается в этиловый спирт, воспринимая от нее водород, перехваченный ею в первой стадии брожения. Таким образом в центре бродильного процесса становится фермент редуктаза, и в понимании химизма брожения

на первый план выступают явления восстановления. Этой теории спиртового брожения С. П. остался верен до конца жизни и неустанно работал над нею, подкрепляя ее все новыми экспериментальными данными. В результате мы имеем целый ряд отдельных экспериментальных работ, из коих многие представляют самостоятельный научный интерес, вне прямой связи с исходной теорией. Отметим наиболее важные из них.

С. П. первому удалось показать, что уксусный альдегид, внесенный извне в бродильную среду, легко восстанавливается в этиловый спирт, — чрезвычайно важный аргумент в пользу его теории. Это восстановление альдегида в спирт особенно энергично идет при наличии сахара, т. е. в условиях хорошего брожения, являющегося источником водорода, необходимого для восстановления. Особенно большое значение придавал С. П. сделанному им открытию о специфическом влиянии ионов цинка и кадмия на брожение. В присутствии солей этих двух металлов (и только их) наблюдается резкое подавление брожения и вместе с тем изменение его внутреннего химизма в смысле накопления уксусного альдегида за счет спирта. С. П. удалось в позднейших работах выяснить механизм этого загадочного действия двух металлов. Оказалось, что катионы кадмия и цинка в сильнейшей степени задерживают работу редуктазы, переводя ее в инактивированное состояние. Благодаря этому выпадает важнейшее звено в бродильном аппарате, энергия брожения резко понижается, и вместе с тем, за недостатком активного водорода, значительная часть уксусного альдегида сохраняется в свободном состоянии, будучи лишена возможности восстановиться до спирта. Не взирая однако на резкое ослабление брожения, количество сахара в бродильной среде убывает в гораздо более значительных размерах, чем это соответствует общему балансу продуктов брожения (CO_2, спирт и уксусн. альдегид). Очевидно, переработка сахара продолжает итти и в отсутствии деятельной редуктазы, но по какому то новому пути, не доходя до нормальных продуктов брожения. К сожалению, С. П. не удалось выяснить, какие именно новые продукты получаются здесь за счет сахара, — вопрос чрезвычайно интересный, но оставшийся открытым.

Замечательно, что действие катионов кадмия и цинка весьма специфично, так как на другие ферменты, присутствующие в бродильной среде (инвертаза, протеаза), они не действуют.

Таким образом то глубокое расстройство бродильного процесса, которое было искусственно вызвано внесением в бродильную среду чуждых ей катионов кадмия и цинка, привело к накоплению в доступных анализу количествах премежуточного продукта брожения уксусного альдегида,

который иначе ускользнул бы от анализа в силу быстрой переработки в дальнейшие продукты нормального брожения. Только таким путем и удалось уяснить роль уксусного альдегида в химизме брожения. С. П. возражали против таких сильных приемов воздействия на естественные биохимические процессы, высказывая опасение, что таким путем можно вызвать образование продуктов, совершенно отсутствующих в нормальном цикле данного процесса. Не соглашаясь с такими возражениями, С. П. указывал, что у нас нет других путей для уловления обычно крайне нестойких и быстро исчезающих промежуточных продуктов. По его убеждению, самое резкое вмешательство в ход естественного биохимического процесса может только изменить константы скоростей отдельных реакций, из цепи которых слагается данный процесс, но не может создать новых реакций с совершенно новыми продуктами. Поэтому он горячо рекомендовал в биохимической методике этот прием искусственного воздействия, поскольку ставится задача уловления промежуточных продуктов, надеясь на тем бо́льший успех для исследователя в этом отношении, чем глубже нарушается гармоническая согласованность между отдельными звеньями изучаемого процесса. В своем курсе физиологии растений, предназначенном для молодых специалистов, он даже ввел особый параграф, излагающий сущность и целесообразность этого методического приема, которому он придавал чрезвычайно большое значение.

Этот прием, в различных модификациях, был применен позднее С. П. и его сотрудниками к уловлению других еще менее стойких промежуточных продуктов как спиртового, так и других брожений (молочно- и маслянокислого). Таким путем удалось выхватить из спиртового и молочнокислого брожения чрезвычайно нестойкий метилглиоксаль, относительно роли которого в брожении существовали до тех пор лишь теоретические предположения. Далее удалось показать, что промежуточным продуктом молочнокислого брожения является та же пировиноградная кислота, как и в спиртовом брожении. Все эти факты и другие соображения дали С. П. право построить чрезвычайно изящную химическую схему, которая генетически общим химическим узлом связывает все три основных типа брожения; все они идут сначала по единому химическому руслу вплоть до пировиноградной кислоты, и только с этого момента обнаруживается между ними расхождение в различные стороны в зависимости от дополнительных факторов второстепенного порядка. Эта химическая теория излагается в его руководстве по физиологии растений, и здесь нет необходимости на ней останавливаться.

В последние годы своей научной работы С. П. повел решительную и принципиальную борьбу с учением о внеклеточном брожении, которое, со времени открытия «зимазы» Бухнером в 1897 г. прочно укоренилось в науке и к нашему времени окристаллизовалось в освященную авторитетом крупнейших ученых традиционную догму, для борьбы с которой необходимо было обладать значительной дозой новаторской энергии и научной смелости. Тем и другим С. П. обладал в высокой степени, почему его имя нередко попадало в центр ожесточенной научной полемики, возгоравшейся вокруг новых идей, которые он смело и с большой страстностью выдвигал против отвергаемых им старых научных теорий. Изучение химизма брожения показало ему, что брожение является весьма сложным процессом, состоящим из цепи разнородных промежуточных реакций, которые должны быть чрезвычайно точно между собой согласованы. Достаточно выпасть одному звену или только изменить в неодинаковой степени константы скоростей отдельных реакций, чтобы гармония общей работы была нарушена и весь аппарат пришел бы в полное расстройство. Однако, внеклеточное брожение идет столь же плавно и гладко, как и брожение живых дрожжей. Каким образом разнородные ферменты, причастные к брожению, могут согласовать между собой свою работу, после того, как оборвана их связь с живой организованной клеткой и они предоставлены каждый самому себе? С. П. решительно отверг все учение о внеклеточном брожении, поставив своей задачей доказать, что и в соке, полученном тем или иным способом из дрожжей, и в различных дрожжевых препаратах, где, предполагалось, нет живых клеток и брожение идет за счет свободных ферментов, — на самом деле, хотя и в небольшом количестве, сохраняются живые клетки дрожжей или способных к брожению бактерий, за счет жизнедеятельности которых и совершается все это quasi-внеклеточное брожение. Нет и не может быть брожения вне живой клетки, так как для такого сложного акта необходимо наличие тонкой структуры плазмы. Все учение Бухнера является крупной научной ошибкой, и от него необходимо немедленно отказаться и вернуться назад к биологическому учению Пастера.

Дискуссия, возгоревшаяся вокруг этого выступления С. П., далеко еще не закончилась, и пока еще трудно предвидеть, каковы будут ее окончательные результаты. Но от судьбы этой дискуссии совершенно не зависит научная ценность тех новых экспериментальных фактов, которые в изобилии содержатся в работах С. П., связанных с этой темой. Особый интерес представляет сделанное им наблюдение о колоссальной бродильной энергии, которуют обнаруживают дрожжевые клетки под влиянием экстрактов из

тех же дрожжей, если только они находятся здесь в небольшом количестве (отсутствие взаимной конкуренции). Индивидуальная энергия таких клеток должна расцениваться неизмеримо выше, чем предполагали раньше, и С. П. стремился все «внеклеточное» брожение свести на повышенную активность живых клеток, всегда в небольшом числе находимых им в тех дрожжевых препаратах, которые обнаруживали способность к брожению. Но эта необычайно высокая чувствительность дрожжей к стимулирующему воздействию самой бродильной среды заставляет заново пересмотреть весь вопрос о стимуляторах брожения и в частности — проблему загадочного кофермента, зимазы.

В соке мацерации, способном к брожению, С. П. как правило находил если не дрожжи, то живые бактерии, способные к спиртовому брожению, и в изящных опытах показал, как можно путем последовательных пересевов «заражать» брожением одну порцию от другой.

Известное затруднение для его теории возникло в связи с тем фактом, что в соке мацерации пропущенном через бактериальный фильтр, сохраняется брожение, но не всегда можно обнаружить присутствие микроорганизмов. Эти затруднения С. П. стремился преодолеть апелляцией к современному учению о способности микроорганизмов к преобразованию в невидимые мельчайшие модификации, проходящие через плотные бактериальные фильтры.

С. П. любил называть себя с известным ударением «биохимиком». Действительно, биохимические интересы стояли у него всегда на первом плане, а в первый период его научной деятельности поглощали его, можно сказать, нацело. Однако было бы совершенно неправильно считать его на этом основании узким специалистом, замкнувшимся в одном ограниченном круге научных интересов. С. П. был широко образованным физиологом, живо и весьма активно интересовавшимся всеми основными проблемами нашей многогранной науки. В духовном наследии, оставшемся после С. П., мы имеем целую серию весьма крупных по своему значению работ, которые стоят совершенно в стороне от биохимического направления. Это прежде всего чисто анатомическая работа «Строение и утолщение стебля двудольных», опубликованная в 1920 г. Для всех, имевших представление о С. П., как о биохимике, появление этой работы было полной неожиданностью. Человек, занимавшийся до сих пор исключительно изучением специальных вопросов по химизму дыхания и брожения, выступает с большой монографической работой по крупнейшему анатомическому вопросу, касающемуся

динамики утолщения стебля, и в этой работе с большой яркостью и убедительностью, которая опирается на огромную, проделанную за короткое время аналитическую работу, ниспровергает традиционное учение о строении и утолщении стебля двудольных, укоренившееся во всех учебниках по анатомии растений. Достаточно сказать, что преподавание курса анатомии растений после выхода в свет этой работы С. П. должно было у нас подвергнуться коренной переработке в соответствии с его основными выводами.

Эта работа, выполненная, можно сказать, мимоходом, на дому в годы, когда наши зимние лаборатории были заморожены и перестали функционировать, быть может, более, чем всякая другая, свидетельствует о широте научных горизонтов С. П. и о многогранности его научного творчества. Приходится изумляться, с какой быстротой и легкостью происходило у С. П. это переключение на новые темы, на совершенно новую постановку вопросов, на быстрое освоение нового научного материала. В короткое время он становился хозяином в новой области, с которой раньше не имел почти никакого контакта, и быстро начинал играть в ней ведущую роль.

Другой проблемой, при изучении которой ему снова пришлось отойти от излюбленных методов биохимии и углубиться на этот раз в область вопросов физиологической экологии, еще более до сей поры ему чуждую, была проблема фотосинтеза.

Первые его работы по фотосинтезу относятся к 1921 — 1923 гг., когда за короткий двухлетний срок им было опубликовано одна за другой пять работ, выполненных в два-три летних сезона в только что созданной им летней лаборатории Петергофского института. Все это сравнительно небольшие работы на отдельные, не связанные между собою эпизодические темы, но в то же время каждая из них затрагивает крупный вопрос, мало или почти совсем не затронутый в литературе, и, благодаря удачно подобранному ряду опытов, дает на него четкий и ясный ответ. Это опять-таки свидетельствует об его высокой даровитости; в его экспериментальной работе, как с справедливой гордостью отмечал и он сам в разговорах, почти не было «брака»; при постановке новой темы он быстро и верно схватывал ядро вопроса и кратчайшим путем шел к намеченной цели.

В первой из этих пяти работ С. П., на основании многочисленных опытов, устанавливает, что ассимиляционный коэффициент $\frac{CO_2}{O_2}$, вопреки утверждению некоторых других исследователей, равен точно единице, и отступления от нее наблюдаются только в начальные моменты фотосинтеза, но затем скоро выравниваются.

Во второй своей работе он приходит к выводу, что поранение листа, обычно вызывающее повышенную активность плазмы (в отношении дыхания и некоторых других физиологических функций), не отражается на энергии фотосинтеза.

В третьей работе С. П. доказывает, что у наших северных растений фотосинтез может итти даже при той ничтожной степени освещения, которая имеется во время светлых белых ночей. Если у многих растений не удается в таких условиях обнаружить фотосинтез, то лишь вследствие плотного закрывания устьиц ночью, а не в силу неспособности хлоропласта реагировать на это освещение.

В четвертой работе С. П. сделал попытку сопоставить энергию фотосинтеза у различных биологических типов растений и пришел к выводу, что бобовые значительно превышают все другие растения в этом отношении и что это, повидимому, необходимо поставить в связь с их обеспеченностью азотом, так как кормление селитрой вызывало подъем фотосинтеза и у других растений.

В пятой работе опытами над *Drosera* и *Pinguicula* С. П. показал, что оба эти насекомоядные растения, даже после кормления их мясной пищей, обнаруживают способность к фотосинтезу в той же степени, как и большинство обычных зеленых растений, из чего необходимо сделать вывод, что чужеядное питание является для них прежде всего источником азота, а отнюдь не углерода.

С 1927 г. одна за другой выходит в свет серия капитальных работ С. П. по фотосинтезу, сцементированных общей задачей выяснить энергию фотосинтеза у различных типов растений в природных условиях.

К этому времени вокруг него сформировалась большая группа опытных учеников, с увлечением работавших под его руководством. Опираясь на их помощь, С. П. получил возможность чрезвычайно широко развернуть изучение поставленного им большого, почти не затронутого в литературе вопроса, в котором необходимо было начинать почти с самого начала, вплоть до конструкции новых приборов. Без помощи энергичных учеников в такой короткий срок немыслимо было бы выполнить такую огромную работу. Начата она была в Петергофе, и предварительная работа дала возможность выяснить основные закономерности в суточном ходе фотосинтеза и сконструировать прибор, пригодный для массовых анализов в природных условиях. Скоро, однако, в пределах Петергофа и в условиях ленинградского климата стало тесно, и С. П. сумел сорганизовать целый ряд экспедиций для изучения фотосинтеза в самых различных районах нашего

обширного Союза, начиная с побережья Ледовитого океана и кончая засушливым и знойным Туркестаном.

В результате мы имеем 4 больших статьи, которые представляют огромный интерес и содержат богатейший экспериментальный материал, дающий право на крупные теоретические выводы и до конца в сущности еще не использованный самим С. П. Он собирался написать большую монографию по фотосинтезу, но не успел осуществить этого намерения.

Первые теоретические итоги, извлеченные им из накопленного экспериментального материала, изложены им в небольшой статье, появившейся в печати уже после его смерти.

Отметим здесь лишь наиболее важные из тех выводов, которые С. П. стремится обосновать новым экспериментальным материалом, собранным им и его учениками за эти годы.

1) Суточный ход фотосинтеза в большинстве случаев выражается в форме капризной кривой с резкими и подчас совершенно неожиданными изломами в течение дня. Кривая фотосинтеза не имеет почти никакой аналогии с суточной кривой метеорологических элементов. Акт фотосинтеза есть явление сложного биологического порядка, и его нельзя рассматривать, как простое отображение влияния внешних факторов.

2) Моменты упадка фотосинтетической активности иногда сопровождаются снижением кривой далеко вниз от оси абсцисс, т. е. в сторону отрицательных величин; здесь поглощение CO_2 заменяется ее выделением (выходящим, по расчетам С. П., далеко за пределы обычной нормы дыхания). С. П. придавал большое значение этому наблюдению, но не мог дать ему рационального объяснения.

3) Необходима критическая проверка всех прежних методов по изучению фотосинтеза, основанных в большинстве случаев на допущении, что суточный ход фотосинтеза имеет плавно-закономерный характер без таких капризных изломов среди дня.

4) Во многих случаях в отдельные моменты дня (обычно утренние) была зарегистрирована в природных условиях энергия фотосинтеза, далеко превосходящая числа, найденные прежними исследователями. В отдельных случаях, прибыль органического вещества за счет фотосинтеза достигала 4—5 г вещества на 1 м² за 1 час, что в 2—3 раза превышает максимальные цифры Сакса и в десятки раз цифры Броуна и Эскомба.

5) Благодаря такому колоссальному напряжению фотосинтетической активности растение может иной раз за 1—2 часа работы полностью покрыть свою суточную потребность в углеводах.

6) Замечательно, что такая исключительно высокая продукция фотосинтеза наблюдалась главным образом у ксерофитов знойной туркестанской пустыни в разгар летних осушающих жаров. Очевидно, ксерофитам свойственна особенно высокая фотосинтетическая активность.

7) Раз вообще возможна, хотя бы в отдельных случаях при обычной норме содержания CO_2 в атмосфере, такая изумительно высокая энергия фотосинтеза, неизбежно заключение, что CO_2 отнюдь не является ограничивающим фактором для фотосинтеза в природе, как это принято думать. То же приходится сказать и относительно многих других внешних факторов. Основное ограничение идет изнутри самого растения и, в силу капризной формы кривой фотосинтеза, его нужно искать в свойствах самой плазмы, обладающей раздражимостью, и легко под влиянием самых слабых импульсов переходящей из одного (более активного) состояния в другое (более пассивное).

Как в отношении бродильной проблемы, так и в отношении фотосинтеза, С. П. свои исследования завершает апелляцией к «плазме», т. е. сложному биологическому принципу, который не представляет собой элементарной суммы химических и физических явлений и не может быть понят с чисто механистической точки зрения.

С. П. не был микробиологом в собственном смысле слова. Однако, ряд биохимических проблем физиологии растений теснейшим образом связан с деятельностью микроорганизмов. В виду этого, работа по изучению на фоне обще-теоретических проблем микробиологических процессов заняла видное место среди его исследований. Его интерес к микробиологии был настолько велик, что в течение семи лет (1923—1930) С. П. был директором и организатором Института сельскохозяйственной микробиологии Всесоюзной Академии сельскохозяйственных наук им. Ленина (ВАСХНИЛ), который ему удалось из маленького, неоформленного учреждения, превратить в обширный институт всесоюзного значения с большими задачами в области сельского хозяйства. Исключительно одаренный ученый, С. П. отличался необычайной широтой кругозора и уменьем не только глубоко охватывать вопрос, но и охватывать его в целом. Эту глубину теоретической мысли и широту охвата он внес и в изучение тех проблем, которые соприкасались с микробиологией. В результате, его работы дали не только интересные теоретические выводы, но ушли далеко из рамок лаборатории, охватив серьезнейшие проблемы промышленности и сельского хозяйства.

За невозможностью коснуться здесь всех работ С. П. в этой области, следует остановиться только на тех вопросах, которые связаны с двумя направлениями его деятельности: изучением почвенных микроорганизмов и получением органических кислот биохимическим путем.

Самые разнообразные вопросы, связанные с азотным обменом, интересовали С. П. В 1914—1916 гг. он опубликовал ряд работ, касающихся ферментативного синтеза азотистых веществ дрожжами. Им было установлено, что в соке сухих дрожжей, в котором сначала происходит чрезвычайно энергичный автолиз, доходящий до 90% первоначально бывших белков, затем, при прибавлении глюкозы, наступает обратный процесс—синтеза. При этом, накопляются вещества, осаждаемые по Штутцеру, но не представляющие из себя собственно белков. Факт получения синтетических продуктов из аминокислот или аммиака, с одной стороны, и сахара, с другой, имеет чрезвычайно существенное значение для понимания азотного обмена в организмах, независимо от того, происходит ли он исключительно под влиянием ферментов, или может происходить спонтанно. Наибольшее внимание из ряда вопросов, связанных с превращением азота, С. П. уделил вопросам о механизме усвоения азота растениями. В процессах усвоения азота, независимо от того, идет ли оно за счет нитратов или свободного азота, существенную роль играют процессы восстановления азотных соединений, и С. П. показал, что как в том, так и в другом случае восстановление идет до аммиака. В 1920 г. С. П. были опубликованы исследования над усвоением нитратов плесневыми грибами: *Aspergillus niger* и *Mucor racemosus*. Применение новой методики (постановка краткосрочных опытов со сменой растворов, на которых культивировались грибы) дало ему возможность, путем полного учета баланса азота, установить ход усвоения нитратов плесневыми грибами. Усвоение идет здесь путем восстановления нитратов до аммиака через промежуточную стадию азотистой кислоты. Ясно, что синтез белковой молекулы должен, в таком случае, итти за счет построения аминокислот из сахара и аммиака. Работой С. П. не только установлены промежуточные продукты усвоения нитратов плесневыми грибами, не только разъяснен смысл всего процесса, но и указан путь, при помощи которого можно в известной степени регулировать его: изменяя условия, можно заставить гриб или накоплять или не накоплять промежуточные продукты восстановления нитратов.

Вопрос об усвоении азота имеет громадное теоретическое и практическое значение, и С. П. поставил его изучение во всей широте, разработав

его как с точки зрения химической, так и в отношении роли фиксирующих азот микроорганизмов в общем балансе связанного азота.

Механизм восстановления свободного азота бактериями оставался до последнего времени, как известно, совершенно не выясненным. С. П. высказал и экспериментально подтвердил гипотезу, что усвоение молекулярного азота бактериями идет через восстановление до аммиака. Опыты над *Azotobacter agile* и *Azotobacter Vinelandii* заставили С. П. придти к заключению, что по существу между ходом усвоения свободного азота микробами и нитратов — грибами нет принципиальной разницы: тот и другой процесс сводится к восстановлению азотистых соединений до аммиака. Аммиак накопляется в некоторых количествах в молодых культурах азотобактера, демонстрируя лишний раз, как необычайно энергично, по сравнению с химическими агентами, идут биохимические процессы в живой клетке.

Усвоение азота, накопление путем редукции — аммиака и синтез белка идут исключительно в присутствии энергетического материала. По исчезновении последнего начинается другой процесс, который тоже идет со значительной энергией — процесс дезаминирования. *Azotobacter* способен, таким образом, образовывать аммиак двумя путями — путем редукции и путем дезаминирования.

Работами С. П. были подтверждены ранее полученные данные, относительно того, что *Azotobacter* представляет собой сильный восстановитель, способный восстанавливать нитраты до нитритов.

С. П. далее перешел к изучению жизнедеятельности азотобактера в естественных условиях существования последнего в почве. Его исследования крымских почв, которые исключительно богаты азотобактером, послужили началом длинного ряда работ, выполненных в Институте сельскохозяйственной микробиологии. Обилие в крымских почвах азотобактера привело С. П. к мысли о том, что эти бактерии должны играть большую роль в обогащении почвы азотом, а следовательно и во всем ее азотном режиме. Поставленный С. П. вопрос о значении свободно-живущих фиксирующих азот бактерий в поднятии плодородия почв, потребовал разносторонней разработки и прежде всего — серьезного изучения биодинамики почв.

С. П. сразу охватил, как много может дать для сельского хозяйства изучение деятельности микроорганизмов в почве. Он сразу учел, как необходимо для этого связать лабораторные работы с сельскохозяйственной практикой и потому широко поставил работы по изучению биодинамики почв в Институте сельскохозяйственной микробиологии. Он начал пропаганду своих идей на ряде съездов и конференций, и заразил своим энтузиазмом

не только своих непосредственных сотрудников, но и гораздо более широкие круги. В настоящее время идеи о необходимости работ по почвенной микробиологии в связи с задачами сельского хозяйства по поднятию плодородия почв прочно укрепились в нашем Союзе и проводятся в самых удаленных его участках.

С течением времени сфера работ была расширена и исследователями были охвачены самые разнообразные типы почв в самых разнообразных климатических условиях, начиная от крайнего Севера, кончая Туркестаном. В длинной серии работ, выполненных под руководством С. П. сотрудниками Института сельскохозяйственной микробиологии был разработан ряд вопросов, связанных с изучением биодинамики почв, имеющих как теоретическое, так и практическое значение. Эти работы шли, с одной стороны, в направлении изучения роли микроорганизмов в обогащения почв азотом, с другой, в направлении изучения биодинамики различного типа почв в связи с их азотным режимом и значением микробиологических процессов в деле поднятия плодородия почв.

С. П. был выдвинут также вопрос о взаимоотношениях между высшими растениями и микрофлорой почвы. В настоящее время вопрос о взаимоотношении отдельных культур высших растений с фиксирующими азот почвенными бактериями в основном получил уже свое разрешение. Отношение отдельных культур к почвенной микрофлоре, по всей вероятности зависит от различного характера их корневых выделений.

Кроме вопросов, связанных с накоплением азота в почве, С. П. уделял большое внимание и вопросам дальнейшего превращения азота и роли микроорганизмов в этих процессах. Одним из основных факторов плодородия почв он признавал быстроту мобилизации азотного фонда почв, регулируемую составом микрофлоры и характером самого азотного фонда.

В последние годы жизни, центральным вопросом работ С. П., был вопрос об образовании органических кислот. Он подошел к этому, чрезвычайно сложному вопросу, с теоретической точки зрения, и как всегда, внес в толкование его, много нового и интересного. Чрезвычайно быстро для С. П. выяснилась возможность применения полученных им результатов в производстве для получения биохимическим путем дефицитных в нашей промышленности органических кислот. Таким образом, в постановке дальнейших вопросов, наблюдается теснейшая связь теории с практикой; широкая постановка дела давала возможность одновременно разрешить вопросы глубокого теоретического значения и выяснить то значение, которое разрешение этих вопросов имеет для биохимической промышленности.

Механизм образования органических кислот грибами до сих пор окончательно еще не выяснен. Число гипотез, относящихся к образованию напр. лимонной кислоты, очень велико; все они связывают образование лимонной кислоты исключительно с углеродным обменом грибов и большею частию непосредственно с дыханием.

Под дыханием С. П. подразумевал определенный ход ферментативных процессов и считал, что выяснение процесса образования органических кислот требует в некоторых случаях совершенно иного подхода.

С. П. предложил новую теорию образования лимонной кислоты, которая указывает, что хотя лимонная кислота грибами и образуется непосредственно из сахара, а не из аминокислот, но ход ее образования связан и стоит в зависимости от белкового обмена.

Опыты с *Aspergillus niger* показали, что в молодых, энергично дышащих клетках лимонная кислота не образуется и следовательно не является нормальным промежуточным продуктом при дыхании. В соответствии с этим лимонная кислота не потребляется грибом в присутствии сахара. В настоящее время точка зрения об участии синтетических процессов в образовании лимонной кислоты является общепризнанной и разрабатывается в разнообразных направлениях.

Экспериментальные данные С. П. показали, что образование лимонной кислоты начинается только после того, как задерживается поступление азота в гриб; эта задержка может происходить или вследствие недостатка азота в питательной среде, или вследствии «насыщения» мицелия гриба азотом.

Работы С. П. дали ясное представление о тех условиях, которые необходимы для образования лимонной кислоты: гриб должен быть молодым, хорошо выросшим, и должен быть поставлен, путем недостатка азотистого питания, в такие условия, которые вызывали бы задержку его роста.

Полученные данные по механизму образования лимонной кислоты дали С. П. целый ряд ценнейших указаний в области промышленного ее получения биохимическим путем.

Одновременно с лабораторными работами С. П. изучал сначала в Институте сельскохозяйственной микробиологии, затем и в Институте пищевой промышленности условия, необходимые для полузаводской постановки получения лимонной кислоты и поставил работы по проектированию этой постановки. Совокупность лабораторных работ и проектировочных изысканий дали возможность детально разработать схему проекта полузаводской установки производства лимонной кислоты, которая и была рассмотрена и утвер-

ждена С. П. летом 1931 г. Согласно этой схеме Институт пищевой промышленности ставит в настоящее время первую в СССР полузаводскую установку биохимического получения лимонной кислоты.

Получение лимонной кислоты, однако, не было единственным производственным вопросом, занимавшим внимание С. П. В течение последнего года в его лаборатории проводились работы по получению молочной кислоты для целей промышленности. Теоретические работы, связанные с исследованием промежуточных продуктов молочно-кислого брожения, заставили С. П. познакомиться не только с биохимическими свойствами молочно-кислых бактерий, но и с общим характером жизнедеятельности и особенностями отдельных их видов. Получение молочной кислоты является в настоящее время одной из насущнейших задач биохимической промышленности и С. П. поставил вопрос о способах получения молочной кислоты из отбросов сыроваренного производства при применении чистых культур *Bacterium caucasicum*, бактерии, сбраживающей лактозу в молочную кислоту. При исследовании этого процесса пришлось затронуть и некоторые чисто теоретические вопросы, связанные с азотным питанием молочно-кислых бактерий. В результате этих исследований и явился разработанный метод получения молочной кислоты из отбросов сыроваренного производства.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ АКАДЕМИКА С. П. КОСТЫЧЕВА

1. Об интрамолекулярном дыхании у *Penicillium glaucum*. Тр. СПб. общ. естествоисп., т. 30, стр. 1, 1899.
2. Значение питательных веществ при анаэробном дыхании плесневых грибов. Журн опытн. агроном., т. 2, стр. 1, 1901.
3. Der Einfluss d. Substrates auf anaërobe Atmung d. Schimmelpilze. Ber. Bot. Ges., Bd. 20, S. 327, 1902.
4. Über Thymonukleinsäure. Ztschr. f. physiol. Chem. Bd. 39, S. 545, 1903.
5. Untersuchungen über d. Atmung und alkoholische Gärung d. *Mucoraceae*. Centrbl. f. Bakt. Abt. II, Bd. 13, S. 490, 1904.
6. Untersuchungen über d. Atmung und alkoholische Gärung d. *Mucoraceae*. Ibid. Bd. 13 b, S. 577, 1904. Schluss.
7. Über Atmungsensyme d. Schimmelpilze. Ber. Bot. Ges., Bd. 22, S. 207, 1904.
8. Über die normale, und die anaërobe Atmung bei Abwesenheit von Zucker. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. 40, S. 563, 1904.
9. Zur Frage über die Wasserstoffausscheidung bei der Atmung der Samenpflanzen. Ber. Bot. Ges., Bd. 24, S. 436, 1906.
10. [und Palladin]. Anaërobe Atmung, Alkoholgärung und Acetonbildung bei den Samenpflanzen. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 48, S. 214, 1906.
11. Idem: Ber. Bot. Ges., Bd. 24, S. 273, 1906.
12. Исследование над анаэробным дыханием растений. СПб. 1907.
13. [и Палладин]. Анаэробное дыхание цветковых растений без образования спирта. Тр. СПб. общ. ест., т. 37, 1907.

14. [und Palladin]. Anaërobe Atmung der Samenpflanzen ohne Alkoholgärung. Ber. Bot. Ges. Bd. 25, S. 51, 1907.
15. Über die Alkoholgärung von *Aspergillus niger*. Ber. Bot. Ges. Bd. 25, S. 44, 1907.
16. Über anaërobe Atmung ohne Alkoholbildung. Ber. Bot. Ges., Bd. 25, S. 188, 1907.
17. Zur Frage d. Wasserstoffbildung bei d. Atmung d. Pilze. Ber. Bot. Ges., Bd. 25, S. 178, 1907.
18. Über d. Anteilnahme der Zymase am Atmungsprozesse der Samenpflanzen. Bioch. Ztschr., Bd. 15, S. 164, 1908.
19. Über d. Zusammenhang d. Sauerstoffatmung d. Samenpflanzen mit der Alkoholgärung. Ber. Bot. Ges., Bd. 26 a, S. 565, 1908.
20. Zweite Mitteilung über anaërobe Atmung ohne Alkoholbildung. Ber. Bot. Ges., Bd. 26, S. 167, 1908.
21. Über d. Einfluss vergorener Zuckerlösungen auf d. Atmung d. Weizenkeime. Biochem. Ztsch., Bd. 23, S. 137, 1909.
22. [und Palladin]. Methoden zur Bestimmung der Atmung der Pflanzen. Handbuch. d. biochem. Arbeitsmethoden v. Abderhalden. Bd. 3, S. 479, 1910.
23. Физиологические исследования над дыханием растений. Юрьев, 1910.
24. Ein eigenthümlicher Typus der Pflanzenatmung. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 65, S. 350, 1910.
25. Über der Vorgang d. Zuckeroxydation bei der Pflanzenatmung. Ztschr. f. physiol. Chemie, Bd. 67. S. 116, 1910.
26. Zur Richtigstellung. Biochem. Ztschr., Bd. 27, S. 326, 1910.
27. [u. Scheloumowa]. Über d. Einwirkung d. Gärungsprod. und der Phosphate auf d. Pflanzenatmung. Jahrb. f. wiss. Bot., Bd. 50, S. 157, 1911.
28. [и Гюббенет и Шелоумова]. Об анаэробном дыхании цветов тополя. Тр. СПб. общ. ест., т. 43, стр. 288, 1912.
29. Памяти Эрнста Шульце. Труды СПб. общ. ест., т. 43, вып. 1. № 5—6, 1912.
30. Bildung von Acetaldehyd bei der alkoholischen Zuckergärung. Ber. d. Chem. Ges. Bd. 45, S. 1289, 1912.
31. Über Alkoholgärung. I. Über die Bildung von Acetaldehyd bei der alkoholischen Zuckergärung. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 79, S. 130, 1912.
32. Über Alkoholgärung. II. Über die Bildung von Aethylalkohol aus Acetaldehyd durch lebende und getötete Hefe. Ibid., Bd. 79. S. 359, 1912.
33. Über Alkoholgärung. III. Die Bedingungen der Bildung von Acetaldehyde bei der Gärung von Dauerhefe. Ibid. Bd. 83, S. 93, 1913.
34. [u. Scheloumowa]. Über Alkoholgärung. IV. Über Zuckerspaltung durch Dauerhefe in Gegenwart von Zinkchlorid. Ibid. Bd. 85, S. 493, 1913.
35. [u. Brlliant]. Über Alkoholgärung. V. Über Eiweiszspaltung durch Dauerhefe in Gegenwart von Zinkchlorid. Ibid., Bd. 85, S. 507, 1913.
36. [Hubbenet und Scheloumowa]. Über die Bildung von Acetaldehyd bei der anaëroben Atmung der Pappelblüten. Ibid., Bd. 83, S. 105, 1913.
37. [u. Hubbenet]. Zur Frage der Reduction von Acetaldehyd durch Hefesaft. Ibid., Bd. 85, S. 408, 1913.
38. Über das Wesen der anaëroben Atmung verschidener Samenpflanzen. Ber. Bot. Ges., Bd. 31, S. 125, 1913.
39. [u. Scheloumowa]. Über Alkoholbildung durch Weizenkeime. Ibid., Bd. 31, S. 422, 1913.
40. [Brilliant und Scheloumowa]. Über die Atmung lebender und getöteter Weizenkeime. Ibid. Bd. 31, S. 432, 1913.
41. Über der Mechanismus d. alkoholische Gärung. Ber. d. d. Chem. Ges. Jahrg. 46. H. 2, S. 339, 1913.
42. О появлении жизни на земле. СПб. 1913.
43. Über Alkoholgärung. VI. Das Wesen der Reduktion von Acetaldehyd durch lebende Hefe. Ztschr. f. physiol. Chem. Bd. 89, S. 367, 1914.
44. Über Alkoholgärung, VII. Die Verarbeitung von Acetaldehyd durch Hefe bei verschiedenen

Verhältnissen. Ibid., B. 92, S. 402, 1914.
45. [u. Brilliant]. Die Synthese stickstoffhaltiger Stoffe im Macerationshefensaft. Ibid., Bd. 91, S. 372, 1914.
46. Zur Frage der Bildung von Acetaldehyd bei der alkoholischen Gärung. Biochem. Ztschr., Bd. 64, S. 237, 1914.
47. Об интрамолекулярном дыхании у *Penicillium glaucum*. Тр. СПб. общ. естествоисп. т. 30, стр. 1, 1914.
48. О брожениях. СПб. Изд. Панафидиной. 1914.
49. О количественном определении спиртов в присутствии уксусного альдегида. Изв. Акад. Наук, 1915.
50. [и Фрей]. О спиртовом брожении. VIII. Влияние хлористого цинка на спиртовое брожение живых и убитых дрожжей. Журн. Русск. бот. общ., т. 1, 1916.
51. [и Зубкова]. О спиртовом брожении. IX. О действии солей цинка и кадмия на ферменты дрожжей. Журн. Русск. бот. общ.. т. 1, стр. 47, 1916.
52. [и Зубкова]. Действие солей цинка и кадмия на ферменты дрожжей. Там же, т. 1. стр. 182, 1916.
53. К вопросу об окислении спирта высшими растениями. Там же, стр. 182, 1916.
54. [и Бриллиант]. Синтез азотистых веществ после автолиза дрожжей. Изв. Акад. Наук, стр. 953, 1916.
55. [и Афанасьева]. Превращение питательных веществ у плесневых грибов в отсутствии кислорода. Там же, т. 2, стр. 77, 1917.
56. О строении стеблей двудольных растений. Там же, т. 2, стр. 98, 1917.
57. [и Зубкова]. О спиртовом брожении. X. Брожение сухих дрожжей в присутствии солей кадмия. Там же, т. 3, стр. 40, 1918.
58. [и Элиасберг]. О спиртовом брожении. XI. Брожение есть жизнь без кислорода. Там же, т. 4, стр. 25, 1919.
59. Исследование над фотосинтезом. I. Отношение $\frac{CO_2}{O_2}$ при усвоении углекислоты зелеными растениями. Там же, т. 5, 1920.
60. Исследование над фотосинтезом. II. Повышается ли энергия усвоения углекислоты на свету под влиянием поранения? Там же, т. 5, 1920.
61. Исследование над фотосинтезом. III. Усвоение углекислоты зелеными растениями во время светлых летних ночей в наших широтах. Там же т. 5, 1920.
62. [и Цветкова]. О питании зеленых паразитов. Там же, т. 5, стр. 1, 1920.
63. [и Бриллиант]. Синтез азотистых веществ после автолиза дрожжей III. Там же, т. 5, 1920.
64. [и Элиасберг]. Форма соединения калия в растениях. Там же, т. 5, 1920.
65. [и Бриллиант]. К вопросу о взаимодействии аминокислот и аммиака с сахарами. Там же, 1920.
66. К вопросу о движении устьиц. Тр. Петр. общ. ест., 1920.
67. [и Афанасьева]. О количественном учете фотосинтеза. Там же, 1920.
68. [и Базилевская]. К вопросу о строении стебля *Chenopodium*. Там же, 1920.
69. [и Никитина]. К вопросу о строении стебля *Plantago*. Там же, 1920.
70. [u. Frey]. Über Alkoholgärung. VIII. Der Einfius von Chlorzink auf die alkoholische Gärung lebender und getöteter Hefe. Ztschr. f. physiol. Chem. Bd. 111, S. 126, 1920.
71. [u. Subkova]. Über Alkoholgärung. IX. Die Einwirkung von Kadmium und Zinksalzen auf Hefefermente. Ibid., Bd. 111, 1920.
72. [u. Eliasberg]. Über die Form der Kaliumverbindungen in lebenden Pflanzengeweben. Ibid., Bd. 111, S. 228, 1920.
73. Über Zuckerbildung aus Nichtzuckerstoffen durch Schimmelpilze. Ibid., Bd. 111, S. 236, 1920.
74. [u. Eliasberg]. Gärung ist Leben ohne Sauerstoff. Ibid., Bd. 111, S. 141, 1920.

75. [u. Tswetkowa]. Über die Verarbeitung der Nitrate in organische Stickstoffbindungen durch Schimmelpilze. Ibid., Bd. 111, S. 171, 1920.
76. Der Gaswechsel bei der CO_2 = Assimilation am Lichte. Ber. Bot. Ges., Bd. 39, 1921.
77. Wundreiz und CO_2. = Ausscheidung am Lichte. Ibid. Bd. 39, 1921.
78. Findet eine Photosynthese während der hellen Nächte in der subarktischen Region statt? Ibid., Bd. 39, 1921.
79. Образование сахаров из несахаристых веществ у плесневых грибов. Журн. Русск. бот. общ., т. 6, стр. 1, 1921.
80. [и Афанасьева]. Переработка сахара аэробными плесневыми грибами в отсутствии кислорода. Там же, т. 6, стр. 11, 1921.
81 [и Цветкова]. К вопросу об усвоении молекулярного азота плесневыми грибами. Там же, т. 6, стр. 19, 1921.
82. О появлении жизни на земле. СПб., 1921.
83. О брожениях. Изд. Гржебина, 1921.
84. [u. Afanassjewa]. Die Verarbeitung ver. organischen Verbindungen durch Schimmelpilze bei Sauerstoffmangel. Jahrb. wiss. Bot., Bd. 60, H. 4, S. 628, 1921.
85. Studien über Photosynthese. I. Das Verhältnis $\frac{CO_2}{O_2}$ bei der Kohlensäureassimilation. Ber. d. bot. Ges., Bd. 39, S. 319, 1921.
86. Studien über Photosynthese. II. Ibid., Bd. 39, S. 328, 1921.
87. [u. Eliasberg]. Über Inwertase von *Mucor racemosus*. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 118, S. 233, 1922.
88. Studien über Photosynthese. III. Findet eine Kohlensäureassimilation während der Sommernächte in der subarktischen Region statt? Ber. d. bot. Ges. Bd. 40, S. 334, 1922.
89. Studien über Photosynthese. IV. Die CO_2 = Assimilation der Leguminosen. Ibid., Bd. 40, H. 3, 112, 1922.
90. Über die Ernährung der grüner Halbschmarotzer. Ibid., Bd. 40, H. 8, S. 273, 1922.
91. Der Bau und das Dickenwachstum der Dikotylenstämme. Ibid., 1922.
92. Микробиология и ее значение для человека. 1922.
93. Натурфилософия и точные науки. 1922.
94. Пастер. 1922.
95. [и Цветкова]. Переработка нитратов и нитритов плесневыми грибами. Журн. Русск. бот. общ., т. 7, стр. 1, 1922.
96. О фотосинтезе насекомоядных растений. Там же, т. 7, стр. 147, 1922.
97. В. И. Палладин. Журн. Русск. бот. общ., т. 7, 1922.
98. Die Photosynthese der Insektivoren. Ber. d. bot. Ges., Bd. 41, S. 277, 1923.
99. [u. Brilliant]. Die Verwandlungen der Aminosäuren in Gegenwart von Zucker. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 127, S. 224, 1923.
100. Über die Bestimmung des Proteinstickstoffs nach Stutzer. Ibid., Bd. 130, S. 34, 1923.
101. Физиология растений. Часть I. Л. 1924.
102. Pflanzenatmung. Berlin (Springer). 1924.
103. Der Bau und das Dickenwackstum der Dikotylenstämme. Beiheft z. Bot. Centrbl. 1924.
104. Zum Problem der Halbschmarotzer. Ber. bot. Ges. Bd. 42, H. 9, S. 363, 1924.
105. Untersuchungen über die Ernährung der grünen Halbschmarotzer. 1924.
106. Chemische Pflanzenphysiologie. Berlin. 1925.
107. Über Alkoholgärung. XI. Über die bei der Hefegärung in Gegenwart von Calciumcarbonat entstehenden Säuren. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 146, 1925.
108. [et Ryskaltchouk]. Les produits de l'assimilation de l'azote moleculaire par *Azotobacter agile*. C. R. Acad. Paris, v. 180. 1925.
109. [et Afanassiewa]. Sur la respiration des microbes de la fermentation lactique. Ibid., v. 181, 1925.
110. [Riskaltschuk u. Schwezowa]. Die ersten Produkte der Bindung des molekularen Stickstoffes durch *Azotobackter*. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 154, S. 1, 1926.

111. Zur Frage der Spezifität der Fermente. Ibid., Bd. 162, H. 1—3, 1926.
112. [Kudriavzewa, Moissejewa u. Smirnowa]. Der tägliche Verlauf der Photosynthese bei Landpflanzen. Planta, Bd. I, H. 5, S. 679, 1926.
113. [u. Schwezowa]. Weitere Untersuchungen über die Nitratreduktion durch *Azotobakter*. Ibid., Bd. 2, H. 4—5, S. 527, 1926.
114. Специфичность ферментов. Юбилейный сборн. посвящ. Бородину. 1927.
115. [Базырина и Васильев]. Энергия фотосинтеза в природных условиях. Журн. экспер. биолог. и медиц. № 15, стр. 150, 1927.
116. [Шелоумова и Шульгина] Новейшие исследования по биодинамике почв. Тр. Отд. Сельскохоз. микробиологии, т. 1, стр. 1.
117. [и Швецова]. Азотистая кислота, как продукт восстановления нитратов азотобактером. Тр. Отд. сельскохоз. микробиологии, т. 2, стр. 113, 1927.
118. [и Шульгина]. Микробиологическая характеристика почвы опытного поля Краснодарского института опытного табаководства на ст. Абинской. Тр. Отд. сельскохоз. микробиологии, т. 2, стр. 3.
119. Весовое содержание микроорганизмов в почве. Тр. Отд. сельскохоз. микробиологии, т. 2 стр. 109.
120. [Медведев и Кардо-Сысоева]. Отсутствие внеклеточного брожения в сухих дрожжах. ДАН-А, стр. 267, 1927.
121. [и Чесноков]. Образование лимонной кислоты грибом *Aspergillus niger*. Там же, 1927.
122. [et Chomitsch]. L'absence de fermentation extracellulaire dans les jus de macérations de la levure. Там же, 1927.
123. [et Faërmann]. Le dédoublement des alcools polyatomiques par la levure. Там же, стр. 387, 1927.
124. [et Faërmann]. La fermentation de la zymine est due aux cellules vivantes. Там же, стр. 193.
125. [и Солдатенков]. Метил-глиоксаль, как промежуточный продукт спиртового брожения. Там же, стр. 245, 1927.
126. [и Солдатенков]. Пировиноградная кислота и метил-глиоксаль, как промежуточные продукты молочно-кислого брожения. Там же, стр. 236, 1927.
127. [et Soldatenkow]. L'acide pyruvique comme produit intermédiaire de la fermentation alcoolique. Там же, 1927.
128. Plant Respiration. Изд. P. Blakistons Son and Co., Philadelphia, pp. IX + 163, 1927.
129. [Bazyrina u. Wassilieff]. Über die Kohlenstoffausbeute bei der Photosynthese unter natürlichen Verhältnissen. Biochem. Ztschr., Bd. 182, H. 1—4, S. 79, 1927.
130. [u. Tschesnokow]. Bildung von Zitronensäure und Oxalsäure durch *Aspergillus niger*. Planta. Bd. 4, $^1/_2$ Heft, S. 181, 1927.
131. [Bazyrina u. Tschesnokow]. Untersuchungen über die Photosynthese der Laubblätter unter natürlichen Verhältnissen. Ibid., Bd. 5, S. 696, 1927.
132. [u. Medwedew]. Über die Inaktivierung einiger Hefefermente durch Zink und Cadmiumsalze. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 164, H. 1—3, S. 77, 1927.
133. Nitratassimilation bei Schimmelpilzen. Ztschr. f. physiol. Chem., Bd. 166, H. 1—3, S. 135. 1927.
134. [u. Soldatenkow]. Brenztraubensäure als ein intermediäres Produkt der alkoholischen Hefegärung. Ibid., Bd. 176, H. 1—3, S. 124, 1927.
135. [Medwedew u. Kardo-Sysojewa]. Über Alkoholgärung. XIII. Die Nichtexistenz der zellfreien Gärung. Ibid. Bd. 168, H. 4, 5, 6, S. 244, 1927.
136. [u. Faërmann]. Das Wesen der Zymingärung. Ibid., Bd. 176, H. 1—2, S. 46, 1928.
137. [u. Faërmann]. Über Alkoholgärung. XIV Mitteilung. Die Verarbeitung der mehrwertigen Alkohole durch Hefe. Ibid., Bd. 173, H. 1—2, S. 72, 1928.
138. [u. Chomitsch]. Über Alkoholgärung. XV Mitteilung. Die Gärung des Hefemacerationssaftes. Ibid., Bd. 176, H. 1—2, S. 55, 1928.
139. [u. Jegorowa]. Über Alkoholgärung. XVIII Mitteilung. Das Verhalten von Hefe gegenüber Glycerinaldehid und Glycerinsäure. Ibid., Bd. 181, H. 5—6, S. 264, 1929.

140. [u. Schulgina]. Über Alkoholgärung. XIX Mitteilung. Über einige gärungsfähige Mikroben im Hefemacerationssaft. Ibid., Bd., 182, H. 1—2, S. 50, 1929.
141. [et Berg]. Sur les formes des combinaisons de calcium dans les tissus des végétaux. ДАН-А, 1929.
142. [et Egorowa]. Le prétendu rôle de l'aldehyde et de l'acide glycérique dans la fermentation alcoolique. ДАН-А, стр. 157, 1929.
143. [et Schulgina]. Les microbes producteurs d'alcool dans les jus de macération des levures. ДАН-А, стр. 161, 1929.
144. [u. Berg]. Die Form des Calciumverbindungen in lebenden Pflanzengeweben. Planta, Bd. 8, H. 1—2, S. 55, 1929.
145. Новые течения в микробиологии и учении о брожениях. Успехи биологич. химии. Вып. IX, 1929.
146. [и Берг]. Формы соединений кальция в растительных тканях. ДАН-А, стр. 1, 1929.
147. [и Холкин]. Биодинамика бухарских селитряных залежей. Тр. Отд. сельскохоз. микробиол. ГИОА, т. IV, 1929.
148. [u. Klupt]. Fermentwirkungen im filtrierten und dialisierten Macerationssaft. Ztschr. f. physiol. Chem. Bd. 189, H. 1—2, S. 11, 1930.
149. [et Berg]. L'action des poisons sur la levure vivante, la levure sèche et le jus de macération. ИМЕН, стр. 631, 1930.
150. [Gwaladse u. Eliasberg]. Bildung von Brenztraubensäure bei der Milchsäuregärung. Ztschr. f. physiol. Chemie. Bd. 188, H. 3—5, S. 127, 1930.
151. [Гваладзе и Элиасберг]. Образование пировиноградной кислоты при молочнокислом брожении. ДАН-А, стр. 553, 1930.
152. [u. Berg]. Über Alkoholgärung. XX Mitteilung. Die Einwirkung von Giftstoffen auf lebende Hefe, Trockenhefe und Macerationssaft. Ztschr. f. physiol. Chemie. Bd. 188, H. 3—5, S. 183, 1930.
153. [и Кардо-Сысоева]. Исследования над суточным ходом фотосинтеза растений Средней Азии. ИМЕН, № 6, стр. 467, 1930.
154. [и Берг]. Исследования над суточным ходом фотосинтеза на Черноморском побережьи. Там же, № 7, стр. 611, 1930.
155. [Базырина и Чесноков]. Суточный ход фотосинтеза при незаходящем солнце в полярной зоне. Там же, стр. 599, 1930.
156. [Tschesnokow u. Bazyrina]. Untersuchungen über den Tagesverlauf der Photosynthese an der Küste des Eismeeres. Planta, Bd. 11, H. 1, S. 160, 1930.
157. [u. Kardo-Syssojewa]. Untersuchungen über den Tagesverlauf der Photosynthese in Zentralasien. Planta. Bd. 11, H. 1, S. 117, 1930.
158. [u. Scheloumowa]. Die Stiekstoffbildung u. d. Ammoniakproduktion durch *Azotobacter*. Ztschr. f. physiol. Chem. Bd. 198, H. 3—4, S. 105, 1931.
159. Atmung der Pflanzen (Aus «Handwörterbuch der Naturwissenschaften». Bd. 1, S. 537, 1931).
160. [et Medwedew]. Sur la constante thermique et le coefficient de temperature de la fermentation du jus de pression et du jus des macération de la levure. ИМЕН, стр. 665, 1931.
161. [и Шелоумова]. Связывание атмосферного азота и образование аммиака азотобактером. ИМЕН, стр. 661, 1931.
162. Die neue Vorstellung von der Photosynthese. Planta. Bd. 13, H. 4, S. 778, 1931.
163. Chemical plant physiology. Philadelphia (Blakiston) XV + 497, 1931.
164. [unter Mitwirkung von D-r Went]. Lehrbuch der Pflanzenphysiologie. Zweiter Band. Berlin, Springer, 1931.
165. Получение лимонной кислоты биохимическим путем. Тр. Центр. биохим. инст. пищевой промышленности (печатается).
166. [и Афанасьева]. Получение молочной кислоты из молочной сыворотки. Тр. Инст. пищевой и вкусовой промышленности (печатается).

167. [и Берг]. Результаты лабораторных работ по выяснению условий опытно-заводской установки биохимического производства лимонной кислоты (печатается).
168. [и Кардо-Сысоева]. Образование глюконовой кислоты у *Aspergillus niger* (печатается).
169. [и Козловская]. Влияние раздражителей на образование кислот у *Aspergillus niger* (печатается).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК ВНУТРИ КРУГА

И. М. ВИНОГРАДОВА

Задача о понижении порядка остаточных членов асимптотических формул, выражающих число целых точек данной области, была намечена мною к решению еще в 1916 г., как естественно вытекающая из развитого мною тогда общего аналитического метода разыскания таких формул.* Однако различные варианты решения этой задачи, придуманные мною за время 1916—1921 гг., не были тогда окончательно оформлены и опубликованы ввиду крайней сложности вычислений и вытекающего отсюда желания найти более краткий путь решения. В опубликованных результатах того времени я ограничился лишь порядком остаточных членов, который применительно к разбираемому в настоящей работе вопросу — числу целых точек внутри круга

$$x^2 + y^2 = a$$

выразился бы так

$$a^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

Это по своей точности приблизительно совпадает с известными тогда оценками, достигнутыми в аналогичных вопросах другими авторами (Г. Вороной, E. Landau и др.).

В 1922 г. появилась работа Van der Corput'a, согласно методу которой порядок остаточного члена в указанной выше задаче должен быть следующий

$$a^{0,33}.$$

Согласно же дальнейшим работам того же автора** этот порядок

* О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя. Сообщ. Харьк. мат. общ., 1916.

** Mathematische Annalen, 1928.

должен быть такой

$$a^{\frac{27}{82}}(\lg a)^{\frac{11}{41}}.$$

В своих работах Van der Corput шел путем соединения метода Weyl'я с методом, аналогичным моему, развитому в указанной работе 1916 г., но найденным независимо от меня.

В настоящей работе, возвращаясь снова к одному из прежних вариантов, я показываю, что все оценки могут быть снижены еще более значительно. Вычисления я веду применительно к указанной выше области круга, однако тот же метод без особого труда может быть распространен и на решение других вопросов того же типа, каковы например задача о делителях и др.

Должен отметить, что указываемый мною порядок остаточного члена

$$a^{\frac{17}{53}+\varepsilon} < a^{\frac{9}{28}}$$

не самый лучший, какой я могу получить. Однако улучшение потребовало бы коренной переработки всего метода и несравнимо более трудных вычислений.

1. Обозначения и основные леммы.

Символами c, c_1, c_2, ... будем обозначать постоянные.

Символами θ, θ_1, θ_2, ... числа, по модулю не превосходящие 1.

Символами ε, ε_1, ε_2, ... произвольные положительные постоянные.

Символическое неравенство

$$A \ll B$$

обозначает, что $|A|$ не превосходит произведения $|B|$ на некоторую постоянную.

Символом $\{z\}$ будем обозначать дробную часть вещественного числа z, а символом (z) растояние z до ближайшего целого, то есть абсолютную величину разности между z и ближайшим к z целым числом.

Лемма 1. Пусть X целое положительное, α вещественное и $\varphi(x)$ целый многочлен, члены которого $\ll 1$ при всех

$$0 \leqq x \leqq X.$$

Тогда

$$\sum_{x=0}^{X-1} e^{2\pi i(\alpha x+\varphi(x))} \ll \min\left(\frac{1}{(\alpha)}; X\right)$$

Лемма 2. Пусть X и Y целые положительные, α и β вещественные и $\varphi(x, y)$ целый многочлен, члены которого $\ll 1$ при всех

$$0 \leqq x \leqq X; \quad 0 \leqq y \leqq Y.$$

Тогда

$$\sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} e^{2\pi i(\alpha x+\beta y+\varphi(x,y))} \ll \min\left(\frac{1}{(\alpha)}; X\right) \cdot \min\left(\frac{1}{(\beta)}; Y\right).$$

Доказательств этих лемм не приводим ввиду их простоты. Подобные же леммы имеют место и для любого числа переменных, но в настоящей работе они нам не понадобятся. Ограничения, наложенные нами на функцию φ, конечно можно было бы заменить и более общими, но это нам тоже не потребуется.

Лемма 3. a) Обозначим буквами A, U, q, r величины, удовлетворяющие условиям

$$U \geqq A \geqq k; \quad 0 < r - q \leqq U$$

где k постоянное $\geqq 2$. Пусть далее $f(x)$ функция, имеющая в промежутке

$$q \leqq x \leqq r$$

вторую производную, удовлетворяющую условиям

$$A^{-1} \leqq f''(x) \leqq kA^{-1}.$$

Тогда

$$\sum_{x>q}^{x<r} e^{2\pi i f(x)} = 0\left(UA^{-\frac{1}{2}}\right).$$

b) Если же сверх того $f(x)$ алгебраическая функция, определяемая уравнением, степень которого постоянное число ν (коэффициенты уравнения могут меняться одновременно с A, U, q, r), третья производная которой в промежутке $q \leqq x \leqq r$ удовлетворяет условию

$$f'''(x) \ll (AU)^{-1}.$$

то

$$\sum_{x>q}^{x<r} e^{2\pi i f(x)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{n>f'(q)}^{n<f'(r)} \frac{e^{2\pi i(-nx_n+f(x_n))}}{\sqrt{f''(x_n)}} + 0(T + \lg U); f'(x_n) = n,$$

где T есть наименьшее из чисел

$$\sqrt{A}; \ (f'(q))^{-1}; \ (f'(r))^{-1}.$$

Доказательство этой леммы можно найти в моей работе «О распределении дробных долей значений функции двух переменных».*

Лемма 4. Если $k \geqq 1$ и n целое положительное, то при любых положительных $x_1, x_2, \ldots x_n$ будем иметь

$$(x_1 + x_2 + \ldots x_n)^k \leqq n^{k-1}(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k).$$

Доказательство не приводим, так как лемма принадлежит к числу общеизвестных.

2. Метода Вейля для случая одного переменного.

А. Пусть P целое положительное. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i f(x)}.$$

Пусть p_1 некоторое положительное целое. Если $p_1 < P$, ξ_1 целое и

$$0 \leqq \xi_1 \leqq p_1 - 1,$$

то имеем

$$S = \sum_{x=-\xi_1}^{P-1-\xi_1} e^{2\pi i f(x+\xi_1)} = \sum_{x=0}^{P_1-1} e^{2\pi i f(x+\xi_1)} + 2\theta p_1; \quad P_1 = P - p_1.$$

Отсюда, суммируя на $\xi_1 = 0, 1, 2, \ldots p_1 - 1$, имеем

$$p_1 S = \sum_{x=0}^{P_1-1} S(x) + 2\theta_1 p_1^2; \quad S(x) = \sum_{\xi_1=0}^{p_1-1} e^{2\pi i f(x+\xi_1)}. \tag{1}$$

При $p_1 < P$ вместо этой формулы можно написать следующую

$$p_1 S = 2\theta_1 p_1^2.$$

Из (1) ввиду леммы 4, имеем

$$|p_1 S| \leqq P^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{x=0}^{P_1-1} |S(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2p_1^2 \tag{2}$$

причем при $P_1 - 1 < 0$ во второй части остается только слагаемое $2p_1^2$.

* Изв. Ленингр. политехн. инст., т. XXX, 1927.

Далее находим

$$|S(x)|^2 = S(x)\,S'(x) = \sum_{\xi_1'=0}^{p_1-1}\sum_{\xi_1=0}^{p_1-1} e^{2\pi i\,(f(x+\xi_1')-f(x+\xi_1))}. \tag{3}$$

Соединив вместе члены двойной суммы, отвечающие одному и тому же значению разности

$$\xi_1' - \xi_1 = r_1;\ \xi_1' = \xi_1 + r_1$$

и, замечая что эта разность может принимать лишь значения

$$r_1 = -(p_1-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, p_1-1,$$

мы можем формулу (3) переписать так

$$|S(x)|^2 = \sum_{r_1=-(p_1-1)}^{p_1-1}\ \sum_{\xi_1=R_1}^{T_1} e^{2\pi i(f(x+\xi_1+r_1)-f(x+\xi_1))}$$

где

$$0 \leqq R_1 \leqq T_1 \leqq p_1 - 1.$$

Теперь неравенство (2) мы можем переписать так

$$|S| \leqq P^{\frac{1}{2}}\,p_1^{-1}\left(\sum_{r_1}\sum_{\xi_1}\sum_{x=0}^{P_1-1} e^{2\pi i(f(x+\xi_1+r_1)-f(x+\xi_1))}\right) + 2p_1. \tag{4}$$

Однако здесь вместо $x+\xi_1$ удобнее ввести опять x. Только тогда новые пределы M_1 и N_1 суммирования по x будут уже зависеть от ξ_1. Но во всяком случае, каково бы ни было ξ_1, имеем

$$0 \leqq M_1 \leqq N_1 < P.$$

Итак неравенство (4) можно теперь переписать так

$$|S| \leqq P^{\frac{1}{2}}\,p_1^{-1}\left(\sum_{r_1}\sum_{\xi_1}|S_1|\right)^{\frac{1}{2}} + 2p_1;\ S_1 = \sum_{x=M_1}^{N_1} e^{2\pi i f_1(x)},$$

где

$$f_1(x) = f(x+r_1) - f(x).$$

Отсюда, возвышая в квадрат, получим

$$|S|^2 \ll P p_1^{-2}\sum_{r_1}\sum_{\xi_1}|S_1| + p_1^2. \tag{5}$$

В. Точно таким же путем, вводя новое число $p_2 = p_1^2$, имеем

$$|S_1|^2 \ll P p_2^{-2} \sum_{r_2} \sum_{\xi_2} |S_2| + p_2^2; \quad S_2 = \sum_{x=M_2}^{N_2} e^{2\pi i f_2(x)} \tag{6}$$

$$f_2(x) = f_1(x + r_2) - f_1(x).$$

Далее, вводя новое $p_3 = p_2^2 = p_1^4$, имеем

$$|S_2|^2 \ll P p_3^{-2} \sum_{r_3} \sum_{\xi_3} |S_3| + p_3^2; \quad S_3 = \sum_{x=M_3}^{N_3} e^{2\pi i f_3(x)} \tag{7}$$

$$f_3(x) = f_2(x + r_3) - f_2(x)$$

и т. д., и наконец

$$|S_{n-2}|^2 \ll P p_{n-1}^{-2} \sum_{r_{n-1}} \sum_{\xi_{n-1}} S_{n-1}| + p_{n-1}^2; \quad S_{n-1} = \sum_{x=M_{n-1}}^{N_{n-1}} e^{2\pi i f_{n-1}(x)} \tag{8}$$

$$f_{n-1}(x) = f_{n-2}(x + r_{n-1}) - f_{n-2}(x)$$

$$|S_n|^2 \ll P p_n^{-2} \sum_{r_n} \sum_{\xi_n} |S_n| + p_n^2; \quad S_n = \sum_{x=M_n}^{N_n} e^{2\pi i f_n(x)} \tag{9}$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x + r_n) - f_{n-1}(x).$$

Применяя лемму (4), из неравенств (5), (6), (7), (8), (9) найдем следующие

$$|S|^{2^n} \ll P^{2^{n-1}} p_1^{-2} \sum_{r_1} \sum_{\xi_1} |S_1|^{2^{n-1}} + p_1^{2^n}$$

$$|S_1|^{2^{n-1}} \ll P^{2^{n-2}} p_2^{-2} \sum_{r_2} \sum_{\xi_2} |S_2|^{2^{n-2}} + p_2^{2^{n-1}}$$

$$|S_2|^{2^{n-2}} \ll P^{2^{n-3}} p_3^{-2} \sum_{r_3} \sum_{\xi_3} |S_3|^{2^{n-3}} + p_3^{2^{n-2}}$$

. . . . . .

$$|S_{n-2}|^{22} \ll P^2 p_{n-1}^{-2} \sum_{r_{n-1}} \sum_{\xi_{n-1}} |S_{n-1}|^2 + p_{n-1}^{22}$$

$$|S_{n-1}|^2 \ll P p_n^{-2} \sum_{r_n} \sum_{\xi_n} |S_n| + p_n^2.$$

Отсюда находим

$$|S|^{2^n} \ll P^{2^n-1} p_1^{-2} p_2^{-2} \dots p_n^{-2} \sum |S_n| + P^{2^n-2} p_n^2. \tag{10}$$

Собирая все доказанное, получаем нижеследующую лемму

Лемма 5. Пусть P целое положительное

$$S = \sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i f(x)}$$

$$p_1^2 = p_2;\ p_2^2 = p_3;\ \dots;\ p_{n-1}^2 = p_n;\ p_1 = \left[P^{2^{-n}}\right]$$

$$\xi_1,\ r_1;\ \xi_2,\ r_2;\ \dots;\ \xi_n,\ r_n \text{ целые}$$

$$0 \leqq \xi_1 < p_1; -p_1 < r_1 < p_1$$

$$0 \leqq \xi_2 < p_2; -p_2 < r_2 < p_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 \leqq \xi_n < p_n; -p_n < r_n < p_n$$

числа M_n и N_n целые (зависящие от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$), удовлетворяющие единственному условию

$$0 \leqq M_n \leqq N_n < P$$

наконец S_n сумма вида

$$S_n = \sum_{x=M_n}^{N_n} e^{2\pi i f_n(x)}$$

где $f_n(x)$ образуется следующим образом

$$f_1(x) = f(x + r_1) - f(x)$$

$$f_2(x) = f_1(x + r_2) - f_1(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x + r_{n-1}) - f_{n-1}(x).$$

Тогда имеем

$$|S|^{2^n} \ll P^{2^n-1} p_1^{-2} p_2^{-2} \dots p_n^{-2} \sum |S_n| + P^{2^n-1},$$

где суммирование распространяется на различные системы значений переменных

$$\xi_1,\ r_1;\ \xi_2,\ r_2;\ \dots;\ \xi_n,\ r_n,$$

не выходящие из указанных для них выше пределов.

3. Метода Вейля для случая двух переменных.

А. Приступая к дальнейшим выводам, мы будем рассматривать функцию

$$f(x, y)$$

от двух переменных.

Далее нами будет введено в рассмотрение целое n и два ряда чисел

$$p_1, p_2, \ldots, p_n; \; q_1, q_2, \ldots, q_n$$

равенствами

$$p_{k+1} = \left[P^{2^{k-n}}\right]; \; q_{k-1} = \left[Q^{2^{k-n}}\right];$$

где P и Q целые положительные.

Кроме того будем рассматривать целые r_k и s_k, ограниченные необходимостью находить первое среди чисел

$$-(p_k-1), \ldots, +1, 0, 1, \ldots, (p_k-1),$$

второе же среди чисел

$$-(q_k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (q_k-1).$$

Далее будут введены функции вида

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= f(x+r_1, y+s_1) - f(x, y) \\ f_2(x, y) &= f_1(x+r_2, y+s_2) - f(x, y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y) &= f_{n-1}(x+r_n, y+s_n) - f_{n-1}(x, y), \end{aligned}$$

где обозначение $f_k(x, y)$ сохраняется одно и то же, независимо от того, какие из возможных для них значений имеют числа

$$r_1, s_1; r_2, s_2; \ldots; r_k, s_k.$$

Символом $S_x^{(k)}$ мы будем обозначать сумму вида

$$S_x^{(k)} = \sum_{x=u}^{u_1} e^{2\pi i f_k(x, y)}; \; 0 \leqq u \leqq u_1 < P$$

опять-таки независимо от того, какие из возможных для них значений имеют числа u и u_1. При этом под $f_0(x, y)$ будем понимать $f(x, y)$. Подобный $S_x^{(k)}$ смысл мы будем приписывать и обозначению.

$$S_y^{(k)} = \sum_{y=v}^{v_1} e^{2\pi i f_k(x, y)}; \; 0 \leqq v \leqq v_1 < Q.$$

Символом S_k будем обозначать сумму вида

$$S_k = \sum_{x=u}^{u_1} \sum_{y=v}^{v_1} e^{2\pi i f_k(x, y)};\ 0 \leqq u \leqq u_1 < P;\ 0 \leqq v \leqq v_1 < Q$$

опять-таки независимо от того, какие из возможных для них значений имеют числа u, u_1, v, v_1.

В частности положим

$$S_0 = S = \sum_{x=0}^{P-1} \sum_{y=0}^{Q-1} e^{2\pi i f(x, y)}.$$

В дальнейшем способ образования сумм S_k кроме

$$r_1, s_1; \ldots; r_k, s_k$$

будет зависеть еще от некоторых чисел

$$\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_k, \eta_k,$$

где каждое ξ_σ и каждое η_σ независимо от остальных чисел пробегает значения, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqq \xi_\sigma < p_k;\quad 0 \leqq \eta_\sigma < q_k.$$

В связи с этим под символом

$$\Sigma S_k$$

будем понимать сумму значений S_k распространенную на все возможные системы значений

$$r_1, \xi_1, s_1, \eta_1; \ldots; r_k, \xi_k, s_k, \eta_k.$$

Символом

$$\sum^{w} T$$

будем обозначать сумму, распространенную на $\ll w$ значений T.

Символом W_k будем обозначать выражение вида

$$W_k = p_k^{-1} q_k^{-1} \left(\sum^{p_k^2 q_k} S_y^{(k-1)} + \sum^{p_k q_k^2} S_x^{(k-1)} \right).$$

В образовании выражений W_k также принимают участие все

$$r_1, \xi_1, s_1, \eta_1; \ldots; r_k, \xi_k, s_k, \eta_k.$$

и т. д. и наконец

$$S_{n-1} \ll (PQ)^{\frac{1}{2}} (p_n q_n)^{-1} \left(\sum_{r_n} \sum_{\xi_n} \sum_{s_n} \sum_{\eta_n} S_n \right)^{\frac{1}{2}} + W_n. \tag{8}$$

Из (5), (6), (7), . . ., (8) находим

$$S^{2^n} \ll (PQ)^{2^{n-1}} (p_1 q_1)^{-2^n} \left(\sum_{r_1} \sum_{\xi_1} \sum_{s_1} \sum_{\eta_1} S_1 \right)^{2^{n-1}} + W_1^{2^n}$$

$$S_1^{2^{n-1}} \ll (PQ)^{2^{n-2}} (p_2 q_2)^{2^{n-1}} \left(\sum_{r_2} \sum_{\xi_2} \sum_{s_2} \sum_{\eta_2} S_2 \right)^{2^{n-2}} + W_2^{2^{n-1}}$$

$$S_2^{2^{n-2}} \ll (PQ)^{2^{n-3}} (p_3 q_3)^{-2^{n-2}} \left(\sum_{r_3} \sum_{\xi_3} \sum_{s_3} \sum_{\eta_3} S_3 \right)^{2^{n-3}} + W_3^{2^{n-2}}$$

. . . . . .

$$S_{n-1}^2 \ll PQ (p_n q_n)^{-2} \sum_{r_n} \sum_{\xi_n} \sum_{s_n} \sum_{\eta_n} S_n + W_n^2.$$

D. Из предыдущих неравенств выводим лемму

Лемма 6.

$$S^{2^n} \ll (PQ)^{2^{n-1}} (p_1 q_1 p_2 q_2 \ldots p_n q_n)^{-2} \Sigma S_n +$$
$$+ W_0^{2^n} +$$
$$+ (PQ)^{2^{n-1}} \Sigma W_1^{2^{n-1}} +$$
$$+ (PQ)^{2^{n-1}+2^{n-2}} \Sigma W_2^{2^{n-2}} +$$
$$+ (PQ)^{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}} \Sigma W_3^{2^{n-3}} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (PQ)^{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2} \Sigma W_n^2$$

4. Применение к оценке модуля тригонометрической суммы.

A. Предыдущую теорию мы применим к функции

$$f(x, y) = \sqrt{a((m+x)^2 + (u+y)^2)}$$

двух переменных x и y.

Здесь a положительное, которое может беспредельно возрастать; числа x и y независимо друг от друга пробегают систему значений

$$0, 1, \ldots, P-1.$$

Здесь P целое положительное, причем выполнены условия:

Пусть M положительное, c_1 и c_2 положительные, причем

$$M \leqq m < 2M; \quad c_1 M \leqq u < c_2 M; \quad P = [Mt],$$

где t некоторая положительная правильная дробь, о которой будет сказано дальше.

B. Имеем

$$\sqrt{(m+x)^2+(u+y)^2} = \sqrt{T+K+L}; \quad T = m^2+u^2;$$

$$K = 2(mx+uy); \quad L = x^2+y^2$$

$$\sqrt{T+K+L} = T^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}T^{-\frac{1}{2}}(K+L) - \frac{1}{4}T^{-\frac{3}{2}}(K+L)^2 +$$

$$+\frac{3}{8}T^{-\frac{5}{2}}(K+L)^3 - \frac{15}{16}T^{-\frac{7}{2}}(K+L)^4 + \frac{105}{32}T^{-\frac{9}{2}}(K+L)^5 - \ldots =$$

$$= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots,$$

где Φ_k обозначает сумму членов измерения k относительно x и y.

C. Имеем далее

$$\Phi_4 = -\frac{1}{4}T^{-\frac{3}{2}}L^2 + \frac{3}{8}T^{-\frac{5}{2}}\cdot 3K^2L - \frac{15}{16}T^{-\frac{7}{2}}K^4 =$$

$$= \frac{\sigma x^4 + \sigma_1 x^3 y + \sigma_2 x^2 y^2 + \sigma_3 x y^3 + \sigma_4 y^4}{16\,T^{\frac{7}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
\sigma &= -m^4 + 10m^2u^2 - 4u^4\\
\sigma_1 &= -24m^3u + 36mu^3\\
\sigma_2 &= 10m^4 - 70m^2u^2 + 10u^4\\
\sigma_3 &= 36m^3u - 24mu^3\\
\sigma_4 &= -4m^4 + 10m^2u^2 - u^4.
\end{aligned}$$

D. Далее Φ_5 имеет вид

$$\Phi_5 = \frac{\alpha x^5 + \alpha_1 x^4 y + \alpha_2 x^3 y^2 + \alpha_3 x^2 y^3 + \alpha_4 x y^4 + \alpha_5 y_5}{T^{\frac{9}{2}}},$$

где $\alpha, \ldots, \alpha_5$ однородные многочлены 5-го измерения относительно m и u.

Совершенно ясно, какой вид будут иметь функции

$$\Phi_6, \Phi_7, \ldots$$

Ё. Полагая теперь $n = 3$, применим метод Вейля для двух переменных. Здесь введем обозначения

$$p_1 = q_1 = \left[P^{\frac{1}{8}}\right]$$
$$p_2 = q_2 = p_1^2$$
$$p_3 = q_3 = p_2^2 = p_1^4.$$

Вводя далее обозначения

$$A = r_1 r_2 s_3 + r_1 s_2 r_3 + s_1 r_2 r_3$$
$$B = r_1 s_2 s_3 + s_1 r_2 s_3 + s_1 s_2 r_3$$
$$C = r_1 r_2 r_3$$
$$D = s_1 s_2 s_3$$

убедимся, что члены третьего измерения в выражении функции $f_3(x, y)$ будут

$$Ex + Fy$$

$$E = \frac{\sqrt{a}}{8T^{\frac{7}{2}}}(12\sigma D + 3\sigma_1 A + 2\sigma_2 B + 3\sigma_3 D)$$

$$F = \frac{\sqrt{a}}{8T^{\frac{7}{2}}}(3\sigma_1 C + 2\sigma_2 A + 3\sigma_3 B + 13\sigma_4 C).$$

Члены второго измерения получаются из Φ_5; порядок их

$$\frac{\sqrt{a}\,M^5 P^2 p_1 p_2 p_3}{M^9} = a^{\frac{1}{2}} P^{2\frac{7}{8}} M^{-4} = a^{\frac{1}{2}} t^{2\frac{7}{8}} M^{-1\frac{1}{8}}.$$

Последнюю величину приравняем 1, откуда и выберем t

$$a^{\frac{1}{2}} t^{\frac{23}{8}} M^{-\frac{9}{8}} = 1; \quad t = M^{\frac{9}{23}} a^{-\frac{4}{23}}.$$

Тогда члены 3-го измерения функции $f_3(x, y)$ окажутся порядка

$$\frac{\sqrt{a}\,M^6 P^3 p_1 p_2 p_3}{M^{11}} = \frac{MP}{M^2} = t.$$

Члены 4-го измерения будут порядка t^2, 5-го — порядка t^3 и т. д. Отбросим в сумме S_3 члены 5-го, 6-го и т. д. измерения, стоящие в показателе членов суммы. Тогда S_3 изменится на величину порядка

$$t^3 P^2.$$

Применяя же к измененной сумме S_3 лемму 2, получим

$$S_3 \ll \min\left(P, (E)^{-1}\right) \cdot \min\left(P, (F)^{-1}\right)$$

конечно при условии, что

$$t^3 P^2 \ll 1.$$

F. Теперь оценим порядок суммы более общего вида

$$\Omega = \sum\sum \varphi(x, y)\, e^{2\pi i \sqrt{a(x^2+y^2)}},$$

распространенной на область значений переменных x и y, ограниченную выпуклым (невогнутым) контуром и удовлетворяющую условию, что для любой ее точки

$$M \leqq x \leqq 2M; \quad c_1 M \leqq y \leqq c_2 M.$$

При этом $\varphi(x, y)$ обозначает функцию, которая с изменением x и y на величины, численно не превосходящие P, изменится на величину

$$\ll Na^{-3\sigma}; \quad N = \max|\varphi(x, y)|; \quad \sigma = \frac{1}{159}.$$

С точностью до величин порядка MPN эту сумму можно разбить на

$$\ll M^2 P^{-2}$$

сумм, которые, отбрасывая количества

$$\ll P^2 N a^{-3\sigma},$$

можно представить в форме

$$N_1 S,$$

где $|N_1| \leqq N$ и S сумма, типа рассмотренного в 3° при обозначениях 4° A. Число m будет пробегать члены некоторой арифметической прогрессии с разностью P и число u — члены арифметической прогрессии тоже с разностью P. При этом m удовлетворяет неравенствам, написанным выше для x, а u — неравенствам, написанным выше для y.

Ввиду сказанного имеем

$$\Omega \ll N \sum_m \sum_u |S| + M^2 N a^{-3\sigma} + MPN.$$

Обозначая двойную сумму, стоящую справа буквою L, будем иметь ввиду леммы 4, леммы 6 и пункта E

$$L^8 \ll (MP^{-2})^7 (P^2)^7 (p_1^2 p_2^2 p_3^2)^{-2} \sum_m \sum_u \Big(\sum \min\big(P,(E)^{-1}\big) \cdot \min\big(P,(F)^{-1}\big) + R \Big)$$

$$R = W_1^8 + P^8 W_2^4 + P^{12} W_3^2.$$

G. В дальнейшем нам понадобится лишь оценка суммы Ω при условии

$$a^{6^{-1}-4\sigma} \leqq M \leqq a^{6^{-1}+3\sigma}$$

из которого нетрудно вывести, что

$$t^8 P^2 \ll 1.$$

Оценка суммы Ω приводит к чрезвычайно громоздким (хотя и простым по идее) вычислениям. Не вдаваясь в подробности этих вычислений, мы заметим лишь, что окончательный результат оценки при

$$a^{6^{-1}+\sigma} \leqq M \leqq a^{6^{-1}+3\sigma} \tag{1}$$

будет следующий

$$\Omega \ll \Big(M^{2+\varepsilon} p^{-\frac{1}{4}} + M^2 a^{-3\sigma} + MP \Big) N =$$

$$= \Big(M^{\frac{38}{23}+\varepsilon} a^{\frac{1}{23}} + M^2 a^{-\frac{1}{58}} + M^{\frac{55}{23}} a^{-\frac{4}{23}} \Big) N.$$

Этот порядок лишь незначительно хуже (произвольно малый порядок ε) чем порядок, который мы получили бы, заменив (E) и (F) просто единицами, вовсе не принимая при этом во внимание суммы значений R.

Весьма громоздкие по выполнению (хотя опять-таки весьма простые по идее) вычисления, в основу которых кладется метода Вейля в применении к случаю одного переменного, показывают, что порядок суммы значений R не достигает тех размеров, которые могли бы нарушить указанную выше оценку суммы Ω.

При

$$a^{6^{-1}-4\sigma} \leqq M \leqq a^{6^{-1}+2\sigma}, \tag{2}$$

однако приведенный выше порядок суммы Ω удобнее заменить более грубым

$$\Omega \ll \Big(M^{\frac{3}{2}} M_0^{\frac{7}{46}+\varepsilon} a^{\frac{1}{23}} + M^2 a^{-\frac{1}{58}} + M^{\frac{55}{23}} a^{-\frac{4}{23}} \Big) N; \quad M_0 = a^{\frac{1}{6}+\frac{2}{159}}$$

ввиду затруднительности вывода для этого случая более точной оценки.

Однако найденные неравенства можно упростить. Действительно при условии (1) имеем

$$\Omega \ll M^2\sqrt{M}\left(M_0^{-\frac{39}{46}+\varepsilon}a^{\frac{1}{23}} + M_0^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{53}} + M_0^{-\frac{5}{46}}a^{-\frac{4}{23}}\right)N \ll$$

$$\ll M^2\sqrt{M}\left(a^{-\frac{23}{4.53}+\varepsilon} + a^{-\frac{23}{4.53}} + a^{-\frac{41}{4.53}}\right)N \ll M^2\sqrt{M}Na^{-\frac{23}{4.53}+\varepsilon}.$$

При условии же (2) имеем

$$\Omega \ll M\sqrt{M}\left(M_0^{\frac{7}{46}+\varepsilon} + a^{\frac{1}{23}} + M_0^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{53}} + M_0^{\frac{41}{46}}a^{-\frac{4}{23}}\right)N \ll$$

$$\ll M\sqrt{M}\left(a^{\frac{15}{4.53}+\varepsilon} + a^{\frac{15}{4.53}} + a^{-\frac{3}{4.53}}\right)N \ll M\sqrt{M}Na^{\frac{15}{4.53}+\varepsilon}.$$

5. Оценка порядка новой тригонометрической суммы.

А. Далее мы оценим порядок сумм

$$H_m = \sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} e^{2\pi i m\sqrt{a-x^2}}; \quad H'_m = \sum_{x<c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} e^{-2\pi i m\sqrt{a-x^2}}; \quad 0<c_3<c_4<1,$$

здесь применим лемму 3. Положим

$$f(x) = -m\sqrt{a-x^2}.$$

Имеем

$$f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{a-x^2}} = u; \quad f''(x) = \frac{ma}{(a-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(m^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2\sqrt{a}};$$

$$f'''(x) = \frac{3max}{(a-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Положим

$$U = \sqrt{a}; \quad A = \sqrt{a}m^{-1}; \quad k = (1-c_4^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда

$$A^{-1} \leqq f''(x) \leqq kA^{-1}; \quad f'''(x) \ll ma^{-1} = (AU)^{-1}.$$

Кроме того при $m \leqq \sqrt{a}\, 2^{-1}$ и $a > 4$ будем наверно иметь $A \geqq 2$. Итак условия леммы 3 соблюдены и мы будем иметь

$$H_m = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{u>mc_5}^{u<mc_6} \frac{m a^{\frac{1}{4}} e^{-2\pi i \sqrt{a(m^2+u^2)}}}{(m^2+u^2)^{\frac{3}{4}}} + O\left(a^{\frac{1}{4}}\right).$$

$$c_5 = \frac{c_3}{\sqrt{1-c_3^2}}; \quad c_6 = \frac{c_4}{\sqrt{1-c_4^2}}.$$

Поэтому будет иметь также

$$H_m = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sum_{u>mc_5}^{u<mc_6} \frac{m a^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i \sqrt{a(m^2+u^2)}}}{(m^2+u^2)^{\frac{3}{4}}} + O\left(a^{\frac{1}{4}}\right).$$

В. Теперь оценим порядок суммы более общего вида

$$K = \sum_m \sum_u \varphi(m,u)\, e^{\pm 2\pi i \sqrt{a(m^2+u^2)}},$$

где суммирование распространяется на область значений переменных m и u, ограниченную прямыми

$$m = M_1; \quad m = M_2; \quad u = c_5 m; \quad u = c_6 m,$$

где

$$M \leqq M_1 < M_2 \leqq 2M.$$

При этом

$$\varphi(m,u) = \frac{(1 \mp i)\, m a^{\frac{1}{4}} \psi(m)}{\sqrt{2}\,(m^2+u^2)^{\frac{3}{4}}},$$

где $\psi(m)$ обозначает функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$\psi(m) \ll N_0 = m^{-1} \quad \text{при} \quad m \leqq M_0$$
$$\psi(m) \ll N_0 = M_0 m^{-2} \quad \text{при} \quad m \geqq M_0$$

и условию, что с изменением m на величину $\leqq P$, $\psi(m)$ изменяется на величину $\leqq P$, $\psi(m)$ изменяется на величину $\ll N_0 a^{-37}$ (обозначения 4° G) по крайней мере при условиях (1) и (2) пункта 4° G.

Нетрудно видеть, что с изменением m и u на величины не превосходящие P, функция

$$\frac{(1 \mp i)\, m a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}\,(m^2 + u^2)^{\frac{3}{4}}}$$

изменяется на величину, отношение которой к наибольшему значению модуля этой функции

$$\ll t.$$

Отсюда следует, что с изменением m и u на величины, не превосходящие P функция $\varphi(m, u)$ изменяется на величину

$$\ll N(a^{-3\sigma} + t) \ll N a^{-3\sigma}; \quad N = \max |\varphi(m, u)|.$$

Заметим, что

$$N \ll \frac{a^{\frac{5}{12}+\frac{2}{159}}}{M^2\sqrt{M}} \text{ при условии (1),}$$

$$N \ll \frac{a^{\frac{1}{4}}}{M\sqrt{M}} \text{ при условии (2).}$$

Поэтому применяя доказанное в пункте 4° G получим в случае (1)

$$K \ll a^{\frac{5}{12}+\frac{2}{159}-\frac{23}{4.159}+\varepsilon} = a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}.$$

В случае же (2) получим

$$K \ll a^{\frac{1}{4}+\frac{15}{4.53}+\varepsilon} = a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}.$$

А так как каждый из интервалов (1) и (2) можно разбить на $\ll \lg a$ интервалов, рассматриваемого нами типа, то окончательно имеем

$$\sum_{m>a^{6^{-1}-4\sigma}}^{m<a^{6^{-1}+3\sigma}} H_m \psi(m) \ll a^{\frac{17}{53}+\varepsilon} + \sum_{m>a^{6^{-1}-4\sigma}}^{m<a^{6^{-1}+3\sigma}} a^{\frac{1}{4}} \psi(m) \ll a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}.$$

С. К случаю

$$m \leqq a^{6^{-1}-4\sigma}$$

мы применим первую часть леммы 3; получим

$$H_m \ll UA^{-\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}}; \quad H_m \psi(m) \ll a^{\frac{1}{4}} m^{-\frac{1}{2}}$$

и потому будем иметь

$$\sum_{m=1}^{m \leqq a^{6^{-1}+4\sigma}} H_m \psi(m) \ll a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{159}\right)} = a^{\frac{17}{53}}.$$

Далее к случаю

$$a^{6^{-1}+8\sigma} \leqq m \leqq a^{\frac{1}{2}} 2^{-1}$$

мы тоже применим первую часть леммы 3. Получим

$$H_m \psi(m) \ll \frac{m^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{159}}}{m^2} = \frac{a^{\frac{5}{12}+\frac{2}{159}}}{m\sqrt{m}}$$

$$\sum_{m>a^{6^{-1}+8\sigma}}^{m \leqq a^{\frac{1}{2}} 2^{-1}} H_m \psi(m) \ll a^{\frac{5}{12}+\frac{2}{159}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{159}\right)} = a^{\frac{17}{53}}.$$

Наконец к случаю

$$m > a^{\frac{1}{2}} 2^{-1}$$

применим очевидное неравенство

$$H_m \leqq \sqrt{a}; \quad H_m \psi(m) \ll \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{159}}}{m^2}$$

$$\sum_{m>a^{\frac{1}{2}} 2^{-1}}^{m=\infty} H_m \psi(m) \ll a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{159}-\frac{1}{2}} < a^{\frac{17}{53}}.$$

D. Собирая все доказанное в пунктах B и C, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} H_m \psi(m) \ll a^{\frac{17}{53}+\varepsilon},$$

где

$$H_m = \sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} e^{\pm 2\pi i m\sqrt{a-x^2}}; \quad 0 < c_3 < c_4 < 1$$

и $\psi(m)$ обозначает функцию, которая

$$\ll N_0 = m^{-1}, \quad \text{если} \quad m \leqq a^{6^{-1}+2\sigma}; \quad \sigma = \frac{1}{159}$$

$$\ll N_0 = a^{6^{-1}+2\sigma} m^{-2}, \quad \text{если} \quad m \leqq a^{6^{-1}+2\sigma}$$

и кроме того, если

$$a^{6^{-1}-4\sigma} \leqq m \leqq a^{6^{-1}+8\sigma},$$

то с изменением m на величину

$$\leqq P = m^{\frac{32}{23}} a^{-\frac{4}{23}}$$

функция $\psi(m)$ изменяется на величину

$$\ll N_0 a^{-3\sigma}.$$

6. Применение рядов Фурье.

А. Полагая

$$\Delta = a^{-6^{-1}-2\sigma}$$

рассмотрим две периодические функции $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ с периодом 1, определяемые равенствами

$$\Phi(x) = \frac{x}{1-\Delta} \quad \text{при} \quad 0 \leqq x < 1-\Delta$$

$$\Phi(x) = -\frac{x-1}{\Delta} \quad \text{при} \quad 1-\Delta \leqq x \leqq 1$$

$$\Phi_1(x) = -\frac{x-\Delta}{\Delta} \quad \text{при} \quad 0 \leqq x \leqq \Delta$$

$$\Phi_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta \leqq x \leqq 1-2\Delta.$$

$$\Phi_1(x) = \frac{x-1+2\Delta}{\Delta} \quad \text{при} \quad 1-2\Delta \leqq x \leqq 1-\Delta$$

$$\Phi_1(x) = 1 \quad \text{при} \quad 1-\Delta \leqq x \leqq 1.$$

Эти функции разлагаются в ряд Фурье по формулам

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 2\pi m x + B_m \sin 2\pi m x)$$

$$A_m = \frac{-\sin^2 \pi m \Delta}{2\pi^2 m^2 \Delta (1-\Delta)}$$

$$B_m = \frac{-\sin 2\pi m \Delta}{4\pi^2 m^2 \Delta (1-\Delta)}$$

$$\Phi_1(x) = 2\Delta + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \cos 2\pi mx + B'_m \sin 2\pi mx)$$

$$A'_m = \frac{2\sin^2 \pi m\Delta - \sin^2 2\pi m\Delta}{2\pi^2 m^2 \Delta}$$

$$B'_m = \frac{-\sin 4\pi m\Delta}{4\pi^2 m^2 \Delta}.$$

B. Нетрудно видеть, что коэффициенты A_m, B_m, A'_m, B'_m удовлетворяют неравенствам

$$A_m \ll N; \quad B_m \ll N; \quad A'_m \ll N; \quad B'_m \ll N,$$

где

$$N = m^{-1}, \quad \text{если} \quad m \leqq a^{6^{-1}+2\sigma}$$

$$N = (\Delta m^2)^{-1}, \quad \text{если} \quad m > a^{6^{-1}+2\sigma}.$$

Кроме того, нетрудно видеть, что при условии

$$a^{6^{-1}-4\sigma} \leqq m \leqq a^{6^{-1}+3\sigma}$$

A_m, B_m, A'_m, B'_m с изменением m на величину $\leqq P$ изменяются на величины $\ll Na^{-3\sigma}$.

C. Применяя формулы Эйлера, разложения для $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ можно переписать так

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_1(m)\, e^{2\pi imx} + \psi_2(m)\, e^{-2\pi imx})$$

$$\Phi_1(x) = 2\Delta + \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_1'(m)\, e^{2\pi imx} + \psi_2'(m)\, e^{-2\pi imx}),$$

где $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$, $\psi_1'(m)$, $\psi_2'(m)$ удовлетворяют таким же неравенствам и условиям, какие были нами отмечены для A_m, B_m, A'_m, B'_m.

D. Заменяя здесь x на $\sqrt{a - x^2}$ и суммируя по x на все

$$c_3\sqrt{a} < x < c_4\sqrt{a}$$

получим

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \Phi\left(\sqrt{a-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(c_4\sqrt{a} - c_3\sqrt{a}\right) + 0(1) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(H_m\psi_1(m) + H'_m\psi_2(m)\right)$$

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \Phi_1\left(\sqrt{a-x^2}\right) = 2\Delta\left(c_4\sqrt{a} - c_3\sqrt{a}\right) + 0(1) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(H_m\psi_1'(m) + H'_m\psi_2'(m)\right).$$

Стоящие здесь суммы H_m и H'_m одинаковы с теми, которые встречались в пункте 5 A. Применяя к этим суммам заключение 5° D, получим

$$(1)\qquad \sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \Phi\left(\sqrt{a-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(c_4\sqrt{a} - c_3\sqrt{a}\right) + 0\left(a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right)$$

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \Phi_1\left(\sqrt{a-x^2}\right) \ll a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{2}{159}} + a^{\frac{17}{53}+\varepsilon} = 0\left(a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right).$$

E. Рассмотрим теперь сумму

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \left\{\sqrt{a-x^2}\right\}.$$

Легко убедимся, что

$$0 \leqq \Phi(u) - \{u\} \leqq \Delta, \quad \text{при} \quad 0 \leqq \{u\} \leqq 1-\Delta$$
$$|\Phi(u) - \{u\}| \leqq 1, \quad \text{при} \quad 1-\Delta \leqq \{u\} \leqq 1.$$

Но неравенство (2) показывает, что число случаев последнего типа будет

$$\ll a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}$$

и потому без труда найдем

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \left\{\sqrt{a-x^2}\right\} = \sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \Phi\left(\sqrt{a-x^2}\right) + 0\left(\Delta\sqrt{a} + a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right),$$

откуда ввиду (1) получим

$$\sum_{x>c_3\sqrt{a}}^{x<c_4\sqrt{a}} \{\sqrt{a-x^2}\} = \frac{1}{2}(c_4\sqrt{a} - c_3\sqrt{a}) + 0\left(a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right).$$

7. Окончательные выводы.

Трудности, сопряженные с рассмотрением интервалов

$$0 \leqq x \leqq c_3\sqrt{a}; \quad c_4\sqrt{a} \leqq x \leqq \sqrt{a}$$

неудобных тем, что первый из них прилегает к значению $x = 0$, для которого — производная нуль, второй же — к значению $x = \sqrt{a}$, для которого производная — бесконечность, устраняются поворотом осей, который сводит вопрос опять к оценке сумм дробных долей функции типа, подобного рассмотренному выше. При этом естественно получается и прежний остаточный член.

После весьма элементарных геометрических преобразований, которые не считаю нужным здесь приводить (подобные преобразования встречались в моих прежних работах *), получим окончательно асимптотическое выражение числа целых точек внутри круга, при чем главным членом будет опять площадь круга, остаточный же член будет того же порядка, что и при оценке суммы дробных долей, т. е.

$$0\left(a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right).$$

В результате всего доказанного, получаем теорему:

Теорема. Число T целых точек внутри круга

$$x^2 + y^2 = a$$

асимптотически выражается формулой

$$T = \pi a + 0\left(a^{\frac{17}{53}+\varepsilon}\right).$$

Замечание. Замечая, что

$$\frac{17}{53} + \varepsilon < \frac{9}{28}$$

мы можем последнюю формулу переписать и так

$$T = \pi a + 0\left(a^{\frac{9}{28}}\right).$$

* Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций ИАН, 1917.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

SUR LES FORMULES DE CAUCHY ET DE GREEN ET QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT

Par V. SMIRNOV (V. SMIRNOFF)

(*Présenté par* A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences*)

1. Soit B — le domaine simplement connexe à un seul feuillet sur le plan de la variable complexe x dont le contour Γ est la courbe rectifiable de Jordan et $f(x)$ — la fonction régulière à l'intérieur de B. Le premier but de ce travail est d'indiquer quelques résultats sur la validité des formules de Cauchy et de Green.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi - x}\, d\xi \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} f(\xi)\frac{\partial G(\xi; x)}{\partial n}\, ds; \tag{2}$$

$G(\xi; x)$ est la fonction de Green pour le domaine B avec le pôle x c.-à-d. $G(\xi; x)$ est la fonction harmonique réelle à l'intérieur de B égale a zéro sur le contour et avec une telle singularité au point x que la différence

$$G(\xi; x) - \lg|\xi - x|$$

n'a pas de singularité au point x. Nous désignons par $f(\xi)$ les valeurs limites de la fonction $f(x)$ sur le contour Γ suivant les chemins non tangents et par n la direction de la normale extérieure sur Γ. Nous traiterons encore quelques problèmes sur les systèmes de fonctions orthogonales sur le contour Γ. Dans quelques cas dans la suite nous leverons l'hypothèse que B soit le domaine à un seul feuillet.

Dans le cas où B est un cercle la formule de Green est la formule connue de Poisson et dans ce cas, comme on sait, les formules (1) et (2) sont les conséquences l'une de l'autre et la condition nécessaire et suffisante

de la validité de ces formules consiste en ce que les moyennes du module de la fonction $f(x)$ sur les circonférences concentriques avec le contour Γ restent bornées c.-à-d. les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\lambda})|\,d\lambda\,(0<r<1)$$

croissant avec r, doivent être bornées quand $r\to 1$. Nous prenons le centre du cercle B pour l'origine $x=0$ et le rayon égal à l'unité.*

Dans la suite nous traiterons les questions analogues pour le domaine B du type signalé plus haut.

2. Nous donnons en premier lieu quelques résultats connus qui nous serons utiles dans la suite.

Soit K le cercle $|z|<1$ et C — la circonférence $|z|=1$. Nous dirons que la fonction $\omega(z)$ régulière à l'intérieur du cercle K appartient à la classe H_δ où $\delta>0$ si les intégrales

$$\int_0^{2\pi}|\omega(re^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda$$

croissant avec r, restent bornées pour $r\to 1$. Il est connu, que si $\omega(z)$ appartient à H_δ elle admet presque partout, suivant les chemins non tangents, les valeurs limites $\omega(e^{i\varphi})$ et on a

$$\lim_{r\to 1}\int_M|\omega(re^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda=\int_M|\omega(e^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda,$$

où M est une partie mesurable arbitraire de l'intervalle (0.2π); outre cela l'égalité

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\omega(re^{i\lambda})-\omega(e^{i\lambda})|^\delta\,d\lambda=0$$

a lieu. Si $\omega(z)$ possède une infinité de zéro $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ à l'intérieur de K la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) \tag{3}$$

* Gr. Fichtenholz. Fundamenta Mathematicae, t. XIII, 1929

est convergente et la fonction

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_n}}{1 - \overline{\alpha}_n z}$$

que nous nommons «la fonction de Blaschke», satisfait à la condition $|b(z)| < 1$ à l'intérieur de K et possède presque partout les valeurs limites égales en module à l'unité.*

Toutes les fonctions de la classe H_δ ont la représentation paramétrique de la forme

$$\omega(z) = b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda) \tag{4}$$

où $b(z)$ est la fonction de Blaschke, $p(\lambda)$ est non négative, les fonctions $\lg p(\lambda)$ et $[p(\lambda)]^\delta$ étant sommables, et $q(\lambda)$ est la fonction bornée non croissante, dont la dérivée est égale presque partout à zéro l'intégrale correspondante étant l'intégrale de Stieltjès. Par le symbole $\exp x$ nous désignons e^x. Si la fonction $\omega(z)$ n'a pas de zéro il faut poser dans la formule (4) $b(z) \equiv 1$. On peut prendre les nombres α_n et les fonctions $p(\lambda)$ es $q(\lambda)$ sous la seule condition qu'ils ont les propriétés mentionnées plus haut, et la formule (4) nous donne la fonction $\omega(z)$ qui appartient à la classe H_δ. Nous exprimons ce faiten disant que la formule (4) nous donne la représentation paramétrique de la classe H_δ.**

Il est facile de voir que $p(\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ est égale presque partout au module des valeurs limites de la fonction $\omega(z)$ c.-à-d. $p(\varphi) = |\omega(e^{i\varphi})|$. Le premier et le troisième multiplicateurs dans la partie droite de la formule (4) ont presque partout les valeurs limites dont le module est égal à l'unité, et à l'intérieur de K leurs modules sont moindres de l'unité. Par conséquent la fonction

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \tag{5}$$

parmi tous les fonctions de la classe H_δ avec les valeurs limites dont le module est égal à $p(\varphi)$ aura le module maximal à l'intérieur de K. Nous nommerons cette fonction «la fonction maximale du module limite $p(\varphi)$».

* F. Riesz. Math. Ztschr., Bd. 18, H. 1/2, 1923.
** Smirnoff. Journ. Soc. Phys.-Math. Leningr., t. II, fasc. 2, 1930.

Comme nous avons déjà dit pour la validité des formules de Cauchy et de Poisson

$$\omega(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(e^{i\lambda}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\lambda)+r^2}\, d\lambda \tag{6}$$

il faut et il suffit que la fonction $\omega(z)$ appartienne à la classe H_1. Si nous posons

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n \tag{7}$$

(on peut dire que la formule (6) est équivalente à ce fait, que les séries trigonométriques

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{8_1}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi) \tag{8_2}$$

sont les séries de Fourier-Lebesgue c.-à-d. les séries de Fourier des fonctions sommables.

Les fonctions $\omega(z)$ de la classe H_1 ont encore la propriété rémarquable suivante: pour que la fonction primitive

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n) z^n$$

soit continue dans le cercle fermé $|z| \leqslant 1$ et absolument continue sur la circonférence $|z| = 1$ il faut et il suffit que le fonction $\omega(z)$ appartienne à la classe H_1.

Supposons en premier lieu que la fonction $F(z)$ à la propriété mentionnée plus haut. Dans ce cas les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\beta_n \cos n\varphi + \alpha_n \sin n\varphi)$$

sont les séries Fourier des fonctions absolument continues, et en les différentiant nous obtenons les séries de Fourier-Lebesgue, d'où il suit que les séries (8) sont les séries de Fourier-Lebesgue et par conséquent la formule (6) a lieu et la fonction $\omega(z)$ appartient à la classe H_1. On peut trouver la démonstration de la proposition inverse dans le mémoire de M. F. Riesz cité plus haut.

On peut aussi dire que les fonctions primitives pour la classe H_1 forment une classe de fonctions, que sont continues dans le cercle fermé $|z| \leqslant 1$ et représentent ce cercle sur la partie bornée d'une surface de Riemann avec le contour rectifiable.*

Nous nommerons tels domaines — les domaines du type α.

Cette circonstance est liée avec le fait que si les deux séries trigonométriques conjuguées sont les séries de Fourier des fonctions à variation bornée elles sont les séries de Fourier des fonctions absolument continues. Ce théorème suit immédiatement des deux théorèmes signalés dans mon mémoire cité plus haut.

Nous avons défini la classe H_δ par la condition que les intégrales

$$\int_0^{2\pi} |\omega(re^{i\lambda})|^\delta \, d\lambda$$

restent bornées. On peut donner une autre définition de cette classe qui reste invariante après la représentation conforme; la fonction $\omega(z)$ appartient à la classe H_δ, si $|\omega(z)|^\delta$ a à l'intérieur de K la majorante harmonique c.-à-d. il existe une telle fonction harmonique $U(r, \varphi)$ à l'intérieur de K que $U(r, \varphi) \geqslant |\omega(re^{i\varphi})|^\delta$. On peut facilement démontrer l'équivalence des deux définitions de la classe au moyen du théorème de Harnack. La seconde définition de la classe H_δ est applicable à chaque domaine simplement connexe.

3. Notons encore deux classes de fonctions, dont l'une sera très utile pour nous dans la suite. Au lieu de la formule (4) définissons la classe A par la représentation paramétrique suivante:

$$(9) \qquad \omega(z) = b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda),$$

* Voir par exemple F. et M. Riesz. IV. Congr. des Math. Scandin. à Stockholm, 1916.

où $b(z)$ est la fonction de Blaschke, $q_1(\lambda)$ — la fonction réelle sommable, $q(\lambda)$ — la fonction réelle à variation bornée, dont la dérivé est égale presque partout à zéro. Cette classe A coincide avec la classe des fonctions, pour lesquelles les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\omega(re^{i\lambda})| d\lambda \tag{10}$$

restent bornées. Le symbole $\overset{+}{\lg} a$ est égal à $\lg a$ pour $a \geqslant 1$ et à zéro pour $0 < a \leqslant 1$.*

On peut dire encore que la classe A est la classe des fonctions $\omega(z)$, pour lesquelles $\overset{+}{\lg} |\omega(z)|$ a la majorante harmonique. Cette définition est applicable pour chaque domaine simplement connexe. Comme on sait la classe A peut être encore définie par ce fait que la fonction $\omega(z)$ est le quotient des deux fonctions regulières bornées.

Définissons encore une classe de fonctions par la représentation paramétrique de la forme (9), où $b(z)$ est la fonction de Blaschke $q_1(\lambda)$ — la fonction sommable, et $q(\lambda)$ la fonction non croissante dont la dérivée est égale presque partout à zéro. Cette classe D fait évidemment la partie de la classe A.

Pour cette classe D le premier et le troisième multiplicateurs dans la partie droite de la formule (9) ont le module moindre que l'unité à l'intérieur de K. Nous avons encore le théorème suivant: pour que la fonction $\omega(z)$ appartienne à la classe D il faut et il suffit que les intégrales (10) restent bornées et

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\omega(re^{i\lambda})| d\lambda = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\omega(e^{i\lambda})| d\lambda. \tag{11}$$

Ce résultat et sa démonstration sont dus à Madame P. Kotchine a qui je doit l'aimable autorisation de citer ce résultat ici afin d'en faire usage dans la suite.

Soit n — un nombre entier positif. Introduisons la fonction

$$q_n(\lambda) = \begin{matrix} q_1(\lambda) \text{ pour } q(\lambda) \leqslant n \\ n \quad \text{pour } q(\lambda) > n \end{matrix}$$

et posons

$$\omega_n(z) = b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_n(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda) \tag{12}$$

* Smirnoff, l. c.

Cette fonction est bornée, car nous avons évidemment $|\omega_n(z)| \leqslant e^n$. Les formules (10) et (12) nous donnent encore $|\omega_n(z)| \leqslant |\omega(z)|$ et

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(z) = \omega(z)$$

uniformément à l'intérieur de K c.-à-d. uniformément dans chaque domaine qui est situé avec son contour à l'intérieur de K. Par conséquent on peut approximer chaque fonction $\omega(z)$ de la classe D par les fonctions bornées minorantes $\omega_n(z)$ d'une telle manière que

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(z) = \omega(z)$$

uniformément à l'intérieur de K. Démontrons maintenant inversement que si une telle approximation est possible la fonction $\omega(z)$ appartient à la classe D.

Le quotient $\frac{\omega_n(z)}{\omega(z)}$ est la fonction bornée et par conséquent la fonction $\omega(z)$ est le quotient des deux fonctions bornées et appartient à la classe A. Soit

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega(re^{i\lambda})|\,d\lambda = \alpha;\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega(e^{i\lambda})|d\lambda = \beta$$

Si $\omega(z)$ n'appartient pas à la classe D nous avons en vertu du théorème connu de M. Faton $\beta < \alpha$. Supposons que ce fait a lieu et introduisons le nombre positif $m = \alpha - \beta$. Fixons le nombre r d'une telle manière que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega(re^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{4}$$

et prenons le nombre n assez grand pour que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega_n(re^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{2}$$

ce qui est possible, car $\omega_n(z)$ tend uniformément vers $\omega(z)$ sur la circonférence $|z| = r$. Nous avons encore $|\omega_n(z)| \leqslant |\omega(z)|$ et par conséquent

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega(e^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\omega_n(e^{i\lambda})|\,d\lambda \geqslant \alpha - \frac{m}{2}.$$

Mais l'inégalité

$$\beta \geqslant \alpha - \frac{m}{2}$$

est en contradiction avec $\alpha - \beta = m$ et par conséquent notre supposition que la fonction $\omega(z)$ n'appartient pas à la classe D est incorrecte.

Nous avons demontré ainsi que la classe D peut être définie par ce fait qu'on peut approximer chaque fonction $\omega(z)$ de cette classe par les fonctions minorantes bornées $\omega_n(z)$ qui tendent uniformément vers $\omega(z)$ à l'intérieur de K. Cette difinition reste invariante par rapport à la représentation conforme et est applicable pour chaque domaine simplement connexe.

Les représentations paramétriques des classes D et H_δ nous donnent le résultat suivant: pour que la fonction $\omega(z)$ appartienne à la classe H_δ dans le cercle K il faut et il suffit qu'elle appartienne à la classe D et que la fonction $|\omega(e^{i\lambda})|^\delta$ soit sommable. Par conséquant pour les formules de Cauchy et de Green dans le cas du cercle il faut et il suffit que la fonction $\omega(z)$ appartienne à la classe D et que ses valeurs limites $\omega(e^{i\lambda})$ soient sommables. Nous obtiendrons dans la suite le résultat analogue pour le cas du domaine arbitraire simplement connexe avec le contour rectifiable.

4. Nous établirons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour la validité des formules de Green et de Cauchy.

Soit $x = \psi(z)$ — la fonction, qui fait la représentation conforme du cercle $K(|z| < 1)$ sur le domaine B. Nous allons désigner par $z = \chi(x, x_0)$ — la fonction inverse, où x_0 est l'image du point $z = 0$ c.-à-d. $x_0 = \psi(0)$. Si B est le domaine général du type α la dérivée $\psi'(z)$ admet presque partout les valeurs limites $\psi'(e^{i\lambda})$ qui coincident avec les valeurs de la dérivée de la fonction absolument continue $\psi(e^{i\lambda})$ cette dérivée étant prise le long de la circonférence $C(|z| = 1)$.*

La formule de Green (2) peut-être écrite pour le domaine B du type α sous la forme:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\xi)\,|\chi'(\xi; x)|\,ds = \int_0^{2\pi} f[\psi(e^{i\lambda})]\,d\lambda$$

c.-à-d. la formule de Green est équivalente au fait, que le théorème de Gauss a lieu pour $f(x)$ après la transformation de B sur le cercle K le point $z = 0$ correspondant au point x. Si nous fixons le point x_0 dans la représentation conforme $z = \chi(x; x_0)$ la formule de Green pour le domaine B

* Privaloff. Journ. de l'École Polyt., 2-me série, cahier 24, 1924.

se transforme en formule de Poisson pour le cercle K et par conséquent la condition nécessaire et suffisante de la formule de Green consiste en ce fait, que $f[\psi(z)]$ appartient à la classe H_1 c.-à-d. dans le domaine B la fonction $|f(x)|$ a la majorante harmonique. Dans ces raisonnements nous n'avons pas besoin de supposer que B est le domaine à un seul feuillet. Cette supposition sera essentielle dans les raisonnements suivants qui se rattachent à la formule de Cauchy.

Soit Γ_r — la courbe à l'intérieur de B qui corresponde à la circonférence $|z| = r$. L'équation de cette courbe a la forme:

$$x = \psi(re^{i\varphi}) \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Démontrons que la condition nécessaire et suffisante de la validité de la formule de Cauchy consiste en ce fait, que les intégrales:

$$\int_{\Gamma_r} |f(\xi)|\, ds$$

restent bornées pour $r \to 1$. Sur le plan de la variable complexe z cette condition est équivalente à ce fait que $f[\psi(z)] \cdot \psi'(z)$ appartient à la classe H_1.

Démontrons en premier lieu que la condition mentionnée est suffisante. Prenons l'intégrale:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f[\psi(z')] \cdot \psi'(z')\, dz'}{\psi(z') - \psi(z)}. \tag{13}$$

Nous avons

$$\frac{1}{\psi(z') - \psi(z)} = \frac{1}{\psi'(z)(z' - z)} + \omega(z'; z),$$

où $\omega(z'; z)$ est la fonction de z' régulière à l'intérieur du cercle K et continue sur le cercle fermé $|z'| \leqslant 1$.

Par condition $f[\psi(z)] \cdot \psi'(z)$ appartient à la classe H_1 et par conséquent le premier terme de la somme

$$I = \frac{1}{\psi'(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f[\psi(z')] \cdot \psi'(z')}{z' - z}\, dz' + \frac{1}{2\pi i} \int_C f[\psi(z')]\, \psi'(z')\, \omega(z'; z)\, dz' \tag{14}$$

est égal à $f[\psi(z)] = f(x)$. Démontrons que le second terme est égal à zéro. La fonction $\omega(z'; z)$ en vertu de la continuité est la fonction bornée dans le cercle $|z'| < 1$ et la fonction

$$f[\psi(z')] \cdot \psi'(z') \cdot \omega(z'; z)$$

appartient par suite à la classe H_1. Mais si la fonction $\Phi(z)$ appartient à la classe H_1 il est facile de voir que

$$\int_C \Phi(z)\,dz = 0.$$

En effet la séparation de la partie réelle et imaginaire nous donne:

$$\int_C \Phi(z)\,dz = i\int_0^{2\pi} [\Phi_1(e^{i\lambda}) + i\Phi_2(e^{i\lambda})]\,e^{i\lambda}\,d\lambda.$$

En tenant compte que dans le cas présent la formule de Poisson a lieu pour $\Phi(z)$, et les séries de Fourier des fonctions réelles $\Phi_1(e^{i\lambda})$ et $\Phi_2(e^{i\lambda})$ seront les séries trigonométriques conjuguées il est facile de prouver que l'intégrale ci-dessus est égale à zéro. Ainsi la formule (14) donne $I = f(x)$ et en tenant compte de la formule (13) nous pouvons écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - x}\,d\xi. \tag{15}$$

Dans la démonstration précédente nous n'avons pas besoin de supposer que la contour réctifiable Γ est la courbe de Jordan. La démonstration que la condition mentionnée plus haut est nécessaire pour la formule de Cauchy est beaucoup plus compliquée et nous supposerons que Γ est la courbe de Jordan. Ainsi supposons que la formule (15) a lieu et prenons l'intégrale:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\chi(\xi) - \chi(x)}\,d\xi \tag{16}$$

où la fonction $z = \chi(x)$ est inverse de la fonction $x = \psi(z)$. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\chi(\xi) - \chi(x)} = \frac{1}{\chi'(x)\cdot(\xi - x)} + \pi(\xi; x),$$

où $\pi(\xi; x)$ est la fonction de ξ regulière à l'intérieur de B et continue sur le domaine fermé B. En vertu de (15) nous avons

$$I_1 = \frac{1}{\chi'(x)}\cdot f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)\cdot\pi(\xi; x)\,d\xi. \tag{17}$$

Nous allons démontrer que le second terme dans la partie droite est égal à zéro. La fonction $\pi(\xi; x)$ peut-être développée en série suivant les

polynômes, cette série étant convergente uniformément dans le domaine fermé B.*

Par conséquent il suffit de démontrer les formules

$$\int_\Gamma f(\xi)\,\xi^n\,d\xi = 0. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Mais ces formules sont, comme on sait,** les conséquences de la formule de Cauchy (15). Ainsi la formule (17) donne

$$I_1 = \frac{1}{\chi'(x)} \cdot f(x) = f[\psi(z)] \cdot \psi'(z),$$

et en tenant compte de la formule (16) nous pouvons conclure que

$$f[\psi(z)] \cdot \psi'(z)$$

est représentable par la formule de Cauchy c.-à-d. appartient à la classe H_1 et les intégrales.

$$\int_{\Gamma_r} |f(\xi)|\,ds$$

restent bornées.

Faisons encore une remarque. Soit $x = \mu(x')$ — la fonction, qui fait la représentation conforme du domaine B sur ce même domaine. Posons

$$f_1(x') = f[\mu(x')].$$

Il est évident que si la formule de Green a lieu pour $f(x)$ elle aura aussi lieu pour $f_1(x')$. Pour la formule de Cauchy cette assertion est inéxacte.

5. La fonction $\psi'(z)$ appartient, comme nous avons dit dans **2**, à la classe H_1, et a la représentation paramétrique de la forme

$$(18)\quad \psi'(z) = b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\,d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\,dq(\lambda).$$

Si le domaine B n'a pas de points de ramification, cette formule ne contient pas la fonction de Blaschke $b(z)$. Dans les raisonnements suivants à propos de la formule de Cauchy nous allons supposer que la formule (18)

* Walsh. Math. Annalen, Bd. 96, Heft 3/4, 1926.

** Privaloff, l. c.

ne contient pas le terme avec l'intégrale de Stieltjès c.-à-d. nous allons supposer que la représentation paramétrique de $\psi'(z)$ à la forme

$$\psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda, \tag{19}$$

où $p(\lambda)$ et $\lg p(\lambda)$ sont les fonctions sommables. La formule (19) est équivalente à ce fait, que $\psi'(z)$ est «la fonction maximale du module limite $p(\varphi)$».

En tenant compte que

$$R \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\lambda - \varphi) + r^2} \quad (z = re^{i\varphi}),$$

où R est le symbole de la partie réelle, il est facile de conclure que notre supposition complémentaire sur $\psi'(z)$ est équivalente à la supposition que la fonction harmonique

$$\lg |\psi'(z)|$$

est représentable par la formule de Poisson. Dans la suite nous ferons l'analyse plus detaillée de notre supposition et maintenant nous nous occuperons de la formule de Cauchy en tenant compte de cette supposition. Nous avons une infinité de fonctions $\psi(z)$ qui font la représentation conforme du cercle K sur le domaine B. Démontrons en premier lieu que si l'une de ces fonctions $\psi_1(z)$ satisfait à la condition (19), toute autre fonction $\psi_2(z)$ lui satisfait aussi. En effet nous pouvons écrire:

$$\psi_2(z) = \psi_1[\nu(z)]; \quad \psi_2'(z) = \psi_1'[\nu(z)] \cdot \nu'(z),$$

où la fonction $\nu(z)$ fait la représentation conforme du cercle K sur ce même cercle. Cette fonction $\nu(z)$ est analytique daus le cercle fermé $|z| \leqslant 1$ et $\lg |\nu'(z)|$ est représentable par l'intégrale de Poisson. Par condition la fonction $\psi_1'(z)$ est «la fonction maximale du module limite donnée» et évidemment la fonction $\psi_1'[\nu(z)]$ jouit aussi de cette propriété c.-à-d.

$$\lg |\psi_1'[\nu(z)]|$$

est représentable par la formule de Poisson. Cela nous conduit à ce fait, que

$$\lg |\psi_2'(z)|$$

est auusi représentable par la formule de Poisson, c. q. f. d.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ régulière à l'intérieur du domaine B appartient dans ce domaine à la classe E_δ si les intégrales

$$\int_{\Gamma_r} |f(\xi)|^\delta \, ds$$

restent bornées pour $r \to 1$. Sur le plan de la variable z la classe E_δ est équivalente à ce fait, que la fonction

$$f[\psi(z)] \{\psi'(z)\}^{\frac{1}{\delta}}$$

appartient à la classe H_δ. Dans ce cas la fonction $f(x)$ a presque partout sur le contour Γ_δ les valeurs limites $f(\xi)$ suivant les chemins non tangents, $|f(\xi)|^\delta$ est sommable et nous avons:

$$\lim_{r \to 1} \int_{\Gamma_r} |f(\xi)|^\delta \, ds = \int_{\Gamma} |f(\xi)|^\delta \, ds.$$

Il est facile de prouver que la définition de la classe E_δ ne dépend pas du choix de la fonction $x = \psi(z)$.

Supposons que la fonction $f(x)$ appartienne à une classe E_α et que la fonction $|f(\xi)|^\beta$ pour $\beta > \alpha$ soit sommable sur le contour Γ. Dans ce cas nous pouvons démontrer que $f(x)$ appartient à la classe E_β. Ce théorème pour le cas du cercle était démontré par l'auteur dans le travail cité plus haut.

En effet nous pouvons écrire

$$f[\psi(z)] \{\psi'(z)\}^{\frac{1}{\beta}} = f[\psi(z)] \cdot \{\psi'(z)\}^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \{\psi'(z)\}^{-\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}.$$

Les deux premiers termes de la partie droite donnent par condition la fonction de la classe H_α et ont la représentation de la forme

$$b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda),$$

où $q(\lambda)$ est la fonction non croissante dont la dérivée est égale presque partout à zéro.

La représentation pour le troisième suit immédiatement de la formule (19), et nous avons pour la partie gauche la représentation de la forme;

$$f[\psi(z)] \{\psi'(z)\}^{\frac{1}{\delta}} = b(z) \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p_1(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda),$$

où $q(\lambda)$ est la fonction non croissante dont la dérivée est égale presque partout à zéro. La condition de la sommabilité de la fonction $f(\xi)$ sur Γ nous montre que la fonction

$$|f[\psi(e^{i\lambda})]|^{\beta}\,|\psi'(e^{i\lambda})|$$

est sommable c.-à-d. $\{p_1(\lambda)\}^{\beta}$ est sommable, la fonction

$$f[\psi(z)]\,\{\psi'(z)\}^{\frac{1}{\beta}}$$

appartient à la classe H_{β} et la fonction $f(x)$ dans le domaine B appartient à la classe E_{β}.

Nous avons démontré plus haut que la validité de la formule de Cauchy est équivalente à la classe E_1. Supposons que ce fait a lieu pour $f(x)$ et que les valeurs limites $f(\xi)$ sur Γ sont bornées presque partout:

$$|f(\xi)| \leqslant M (\text{sur } \Gamma), \tag{20}$$

où M est une constante. Dans ce cas la fonction $|f(\xi)|^{\beta}$ est sommable sur Γ pour chaque valeur positive de β et par conséquent la fonction $f(x)$ appartient à la classe E_{β} pour chaque $\beta > 0$. Il est facile maintenant de démontrer que l'inégalité (20) a lieu aussi à l'intérieur de B. Nous profitons pour cela de la méthode élégante de M. Landau. Dans le cas considéré $\{f(x)\}^n$ pour chaque valeur entière positive de n appartient à la classe E_1 et nous avons la formule de Cauchy:

$$\{f(x)\}^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\{f(\xi)\}^n}{\xi - x}\,d\xi.$$

En faisant l'évaluation de l'intégrale nous aurons:

$$|f(x)| \leqslant M\left(\frac{l}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où l — est la longueur de la courbe Γ et δ est la distance du point x du contour Γ. En faisant n tendre vers l'infini, nous aurons l'inégalité

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{21}$$

Nous avons ainsi le théorème suivant: si la formule de Cauchy a lieu et les valeurs limites ont presque partout l'évaluation (20), à l'intérieur de B on a aussi l'inégalité (21).

Nous allons donner maintenant les conditions nécessaires et suffisantes des formules de Green et Cauchy sous la forme nouvelle. Pour la formule de Green cette condition consiste à ce fait, que $f[\psi(z)]$ appartient à la classe H_1 c.-à-d. $f[\psi(z)]$ appartient à la classe D et a les valeurs limites sommables sur la circonférence C. Sur le plan x nous aurons la condition suivante: $f(x)$ appartient à la classe D et la fonction

$$f(\xi)\cdot\chi'(\xi;x)$$

est sommable sur Γ. Il suffit de vérifier la dernière condition pour un choix déterminé quelconque du point x, qui a pour l'image $z=0$.

Pour la formule de Cauchy le produit $f[\psi(z)]\cdot\psi'(z)$ doit appartenir à la classe H_1. En tenant compte de ce fait, que $\psi'(z)$ a la représentation de la forme (19) nous pouvons affirmer, que la fonction $f[\psi(z)]$ a la représentation de la forme (9) où $q(\lambda)$ est la fonction non croissante, dont la dérivée est égale presque partout à zéro, c.-à-d. $f[\psi(z)]=f(x)$ doit appartenir à la classe D et $f(\xi)$ doit être sommable sur Γ.

Il est facile de voir que ces conditions sont en même temps suffisantes pour la formule de Cauchy. Nous pouvons donc donner les conditions nécessaires et suffisantes de formules de Cauchy ou de Green sous la forme suivante: $f(x)$ apparient à la classe D et les intégrales, qui font partie de ces formules, ont un sens.

Dans le cas où Γ est une courbe analytique nous avons l'inégalité

$$0<m<|\chi'(\xi;x)|<M(\text{sur }\Gamma)$$

et les intégrales de Cauchy et de Green ont un sens en même temps c.-à-d. dans le cas du contour analytique les formules de Cauchy et de Green sont les conséquences l'une de l'autre.

6. Soit $F(\xi)$ — une fonction bornée et mesurable définie sur le contour Γ du domaine B. Au moyen de la représentation conforme nous obtenons la fonction $F[\psi(e^{i\lambda})]$ définie sur la circonférence $C(|z|=1)$. Supposons que cette fonction satisfasse aux conditions:

$$\int_C F[\psi(\xi)]\xi^n d\xi=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{22}$$

Dans ce cas il existe, comme on sait, la fonction $F[\psi(z)]$ régulière à l'intérieur du cercle K, dont les valeurs limites sont égales presque partout à $F[\psi(\xi)]$ et que s'exprime par la formule de Cauchy. Cette dernière formule

nous donne le principe du module c.-à-d. la fonction $F[\psi(z)]$ est bornée à l'intérieur de K. Il suit de cela que $F[\psi(z)]\cdot\psi'(z)$ appartient à la classe H_1 et par conséquent la fonction $F(x)$ régulière à l'intérieur du domaine B s'exprime aussi par la formule de Cauchy. Il suit de cette formule les conditions.*

$$\int_\Gamma F(\xi)\xi^n d\xi = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{23}$$

On peut inversement démontrer que les conditions (22) sont les conséquences des conditions (23). En effet si les dernières ont lieu il existe la fonction $F(x)$ avec les valeurs limites $F(\xi)$ pour laquelle a lieu la formule de Cauchy, et par conséquent $F[\psi(z)]\cdot\psi'(z)$ appartient à la classe H_1. Par supposition $\psi'(z)$ s'exprime par la formule (19) et $F[\psi(e^{i\lambda})]$ est la fonction bornée.

Il s'en suit que $F[\psi(z)]$ appartient à la classe D et ses valeurs limites donnent la fonction sommable c.-à-d. $F[\psi(z)]$ appartient à la classe H_1 et les conditions (22) ont lieu c. q. f. d. Pour démontrer l'équivalence des conditions (22) et (23) il suffit de supposer que les intégrales, qui font partie de ces conditions ont un sens.

Si la fonction $F(\xi)$ définie sur le contour Γ est la fonction continue ou est équivalente à une fonction continue, les conditions (22) sont, comme on sait,** les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe la fonction $F[\psi(z)]$ régulière à l'intérieur de K et continue dans le cercle fermé K avec les valeurs limites $F[\psi(e^{i\varphi})]$. Par conséquent les conditions (23) ont le même sens pour le domaine B.

7. Nous nous insistons maintenant de plus près sur l'hypothèse, qui s'exprime par la formule (19). En général si le domaine B du type α n'a pas de points de ramification nous avons pour la fonction $\psi'(z)$ qui appartient à la classe H_1, la représentation paramétrique suivante:

$$\lg\psi'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda), \tag{24}$$

où $p(\lambda)$ et $\lg p(\lambda)$ sont les fonctions sommables et $q(\lambda)$ est la fonction non croissante, dont la dérivée est presque partout égale à zéro. Les deux termes de la partie droite appartiennent à toutes les classes H_δ pour $\delta<1$.*** Les

* Privaloff, l. c.

** Walsch, Trans. of Americ. Mat. Soc., vol. 30, № 2, 1928.

*** Smirnoff, l. c.

valeurs limites de la partie réelle $\lg|\psi'(z)|$ donnent la fonction sommable $\lg p(\lambda)$. Si les valeurs limites de la partie imaginaire $\arg\psi'(z)$ donnent aussi la fonction sommable, la fonction $\lg\psi'(z)$ appartient à la classe H_1 et dans la formule (24) le deuxième terme de la partie droite doit s'annuler. Par conséquent la sommabilité de valeurs limites $\arg\psi'(z)$ est la condition suffisante pour la validité de l'hypothèse, qui s'exprime par la formule (19). Si la fonction $\arg\psi'(z)$ est bornée ce fait a évidemment lieu. Cette condition suffisante est certainement satisfaite pour les contours de Jordan convexes, étoilés ou pour les contours, qui se composent d'un nombre fini des arcs avec la tangente qui varie d'une manière continue.

Je ne pouvais pas démontrer la formule (19) pour les cas généraux du domaine B à un seul feuillet avec le contour réctifiable de Jordan et dans la suite je veux seulement signaler quelques circonstances équivalentes à l'hypothèse (19) pour ce cas.

Soit l la longueur du contour Γ et $P_n(x)$ — les polynômes orthogonaux sur ce contour:

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma P_n(x)\overline{P_m(x)}\,ds = \varepsilon_{n,m} \quad (\varepsilon_{n,m}=0 \text{ pour } n\neq m;\ \varepsilon_{nn}=1).$$

J'ai démontré* que la formule (19) donne la condition nécessaire et suffisante pour que la formule de la fermeture par rapport aux polynômes $P_n(x)$ ait lieu pour chaque fonction $f(x)$ de la classe E_2 dans le domaine B. Ainsi la formule (19) sera démontrée, si nous démontrons la formule de fermeture mentionnée plus haut.

Introduisons la fonction $x=\psi(z)$ qui fait la représentation conforme du cercle $K(|z|<1)$ sur le domaine B et soit $z=\chi(x;a)$ — la fonction inverse, a étant l'image du point $z=0$. Comme j'ai démontré dans le mémoire cité la formule de la fermeture mentionnée plus haut est équivalente au fait que la formule de la fermeture a lieu pour la fonction $F(z)=1$ (formule (45) du mémoire cité) par rapport aux fonctions

$$R_n(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{l}}P_n[\psi(z)]\sqrt{\psi'(z)}, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

qui sont orthogonales sur la circonférence $C(|z|=1)$. Cette formule a la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}|P_n(a)|^2=\frac{l}{2\pi}|\chi'(a;a)|. \tag{25}$$

* Smirnoff. Journ. Soc. Phys. Math. Lenirgrad, t. II, fasc. 1, 1928.

Soit $\mu_n(a)$ — le minimum des intégrales de la forme

$$I_n = \frac{1}{l}\int_\Gamma |1 + a_1(\xi - a) + a_2(\xi - a)^2 + \ldots + a_n(\xi - a)^n|^2 ds$$

et

$$\mu(a) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(a).$$

Nous pouvons écrire

$$I_n = \frac{1}{l}\int_\Gamma \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(\xi)\right|^2 ds = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2$$

sous la condition

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(a) = 1.$$

En profitant de l'inégalité de Cauchy nous obtenons la formule connue:

$$\mu_n(a) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |P_k(a)|^2}$$

et nous pouvons écrire la condition (25), équivalente à la fermeture des polynômes $P_n(x)$ sous la forme

$$\mu(a) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(a) = \frac{2\pi}{l \cdot |\chi'(a;a)|}. \tag{26}$$

Si cette fermeture n'a pas lieu nous avons au lieu de (26) l'inégalité

$$\mu(a) > \frac{2\pi}{l \cdot |\chi'(a;a)|}. \tag{27}$$

Nous voulons signaler maintenant une condition suffisante pour que la formule (26) a lieu. Cette condition sera aussi suffisante pour la formule (19). Nous supposons qu'il existe une infinité des domaines B_n qui convergent vers B d'une telle façon, que chaque B_n contient le domaine fermé B à son intérieur et si $z = \chi_n(x;a)$ fait la représentation conforme du domaine B_n sur le cercle K et L_n est la longueur de l'image de la courbe Γ après cette représentation nous avons

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi. \tag{28}$$

Nous allons démontrer que la formule (26) est la conséquence de cette supposition. Introduisons la fonction

$$\delta_n(x) = \frac{\sqrt{\chi_n'(x;a)}}{\sqrt{\chi_n'(a;a)}} \quad (\delta_n(a) = 1).$$

En vertu du théorème de M. Runge on peut construire le polynôme $Q_n(x)$ qui est égal à l'unité pour $x = a$ d'une telle manière que dans le domaine fermé B a lieu l'inégalité

$$|\delta_n(x) - Q_n(x)| < \eta_n.$$

où η_n est un nombre positif donné à l'avance. Nous prenons ces nombres sous la condition $\eta_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Nous avons évidemment

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma |Q_n(x)|^2\,ds \leqslant \frac{1}{l}\int_\Gamma |\delta_n(x) - Q_n(x)|^2\,ds + \frac{1}{l}\int_\Gamma |\delta_n(x)|^2\,ds +$$

$$+ \frac{2}{l}\int_\Gamma |\delta_n(x) - Q_n(x)|\,|\delta_n(x)|\,ds.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz nous obtenons

$$(29) \qquad \frac{1}{l}\int_\Gamma |Q_n(x)|^2\,ds \leqslant \eta_n^2 + \frac{L_n}{l|\chi_n'(a;a)|} + \frac{2}{l}\sqrt{l\cdot\eta_n^2\cdot\frac{L_n}{|\chi_n'(a;a)|}}.$$

Si p_n est le degré du polynôme $Q_n(x)$ nous avons:

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma |Q_n(x)|^2\,ds \geqslant \mu_{p_n}(a).$$

De la définition $\mu_n(a)$ il suit que $\mu_n(a)$ tend vers $\mu(a)$ en diminuant et par conséquent

$$\frac{1}{l}\int_\Gamma |Q_n(x)|^2\,ds \geqslant \mu(a)$$

pour chaque valeur de n c.-à-d.

$$\mu(a) \leqslant \eta_n^2 + \frac{L_n}{l\cdot|\chi_n'(a;a)|} + \frac{2}{l}\sqrt{l\cdot\eta_n^2\cdot\frac{L_n}{|\chi_n'(a;a)|}}.$$

Si n tend vers l'infini, nous avons

$$\eta_n \to 0;\ L_n \to 2\pi;\ \chi_n'(a;a) \to \chi'(a;a)$$

et par conséquent

$$\mu(a) \leqslant \frac{2\pi}{l \cdot |\chi'(a;a)|}.$$

Mais, comme nous avons signalé plus haut

$$\mu(a) \geqslant \frac{2\pi}{l \cdot |\chi'(a;a)|}$$

et nous obtenons ainsi la formule (26) c. q. f. d. Par conséquent la propriété géométrique du domaine B signalée plus haut se présente comme la condition suffisante pour la formule (19).

8. En supposant, comme plus haut, que B soit le domaine à un seul feuillet, dont le contour Γ est la courbe de Jordan réctifiable, je veux démontrer dans ce paragraphe que la formule (19) est équivalente au fait que le principe du module est la conséquence de la formule de Cauchy. Nous avons déjà démontré plus haut que la formule (19) ayant lieu le principe du module est la conséquence de la formule de Cauchy. Nous allons démontrer maintenant qu'en supposant que la formule (19) n'a pas lieu on peut construire la fonction $f(x)$ régulière à l'intérieur de B dont les valeurs limites sont égales en module sur Γ presque partout à l'unité, qui s'exprime par la formule de Cauchy et dont le module à l'intérieur de B est partout supérieur à l'unité.

En effet, supposons que la représentation paramétrique de $\psi'(z)$ contienne l'intégrale de Stieltjès:

$$\psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda),$$

où $q(\lambda)$ est la fonction bornée non croissante, dont la dérivée est égale presque partout à zéro. En faisant la représentation conforme sur le plan x, posons

$$f(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda) \right].$$

Le module de cette fonction s'exprime par la formule

$$|f(x)| = \exp\left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \lambda) + r^2} dq(\lambda) \right] \quad (z = re^{i\varphi}).$$

Il est évident que $|f(x)| > 1$ à l'intérieur de B et les valeurs limites de $|f(x)|$ sont égales presque partout à l'unité. La fonction

$$f[\psi(z)] \cdot \psi'(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda$$

appartient à la classe H_1 et par conséquent $f(x)$ s'exprime par la formule de Cauchy. En définitive la fonction $f(x)$ a toutes les propriétés signalées plus haut.

On peut signaler encore une proposition équivalente à la formule (19). Soit $z = \chi(x)$ — la fonction inverse de la fonction $x = \psi(z)$.

Si la représentation paramétrique de la fonction $\psi'(z)$ ne contient pas de terme avec l'intégrale de Stieltjès, la représentation de la fonction

$$\chi'(x) = \frac{1}{\psi'(z)}$$

ne contient pas d'intégrale de Stieltjès avec la fonction non décroissante c.-à-d. la fonction $\chi'(x)$ appartient à la classe D. Inversement si la fonction $\chi'(x)$ appartient à la classe D la représentation paramétriqus de la fonction $\psi'(z)$ ne contient pas d'intégrale de Stieltjès. Par conséquent la formule (19) est équivalente à ce fait qu'on peut approximer $\chi'(x)$ par les fonctions minorantes bornées, qui tendent uniformément vers $\chi'(x)$ à l'intérieur de B.

9. Dans la suite nous allons supposer que le domaine B soit le domaine général du type α. Dans ce cas la représentation paramétrique de la fonction $\psi'(z)$ peut contenir la fonction de Blaschke et le terme avec l'intégrale de Stieltjès. Nous allons considérer l'influence de ce terme sur la théorie des fonctions orthogonales sur le contour Γ. Pour ce but il est nécessaire de construire une classe de polynômes $q_n(z)$.

Soit $p(\lambda)$ une fonction non négative dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$ les fonctions $p(\lambda)$ et $\lg p(\lambda)$ étant sommables. Nous définissons les polynômes $q_n(z)$ comme les polynômes orthogonaux sur la circonférence $|z| = 1$ avec le poids $p(\lambda)$ c.-à-d.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\lambda) q_n(e^{i\lambda}) \overline{q_m(e^{i\lambda})} d\lambda = \varepsilon_{n,m} \quad (\varepsilon_{n,m} = 0 \text{ pour } n \neq m;\ \varepsilon_{nn} = 1).$$

La théorie de ces polynômes a été étudiée par M. Szegö dans son mémoire «Beiträge zur Theorie der Toeplitz'schen Formen» (Math. Ztschr.,

Bd. 6; H. 3/4, 1920; p. 176 et Bd. 9; H. 3/4, 1921, p. 175). Nous voulons démontrer un théorème sur le développement suivant ces polynômes, qui nous sera utile dans la suite

Soit $D(z)$ — la fonction maximale du module limite $\sqrt{p(\varphi)}$, qui appartient à la classe H_2

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda. \tag{30}$$

La série de Fourier de la fonction

$$\pi(z) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha} z} \cdot \frac{1}{D(z)} \quad (|\alpha| < 1) \tag{31}$$

sera

$$\overline{D(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{q_k(\alpha)}\, q_k(z), \tag{32}$$

et l'inégalité de Bessel nous donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} |q_k(\alpha)|^2 \leqslant \frac{1}{(1 - |\alpha|^2)\,|D(\alpha)|^2}, \tag{33}$$

d'où il suit que la série

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z) \tag{34}$$

converge absolument et uniformément dans chaque cercle $|z| \leqslant r < 1$ si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \tag{35}$$

est convergente. Supposons que cette dernière circonstance a lieu. Il est facile à prouver que: 1) la fonction

$$D(z) \cdot \omega(z) \tag{36}$$

appartient à la classe H_2; 2) les coefficients x_k sont les coefficients de Fourier de la fonction $\omega(z)$; 3) pour cette fonction a lieu l'équation de la fermeture.

La fonction $D(z)$ par sa définition appartient à la classe H_2 et si nous la multiplions par le polynôme la nouvelle fonction obtenue

$$D(z) \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k q_k(z)$$

appartient aussi à la classe H_2. Nous pouvons donc écrire:

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left| \sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left| \sum_{k=0}^{n} x_k q_k(e^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left| \sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda$$

croît avec r et nous avons pour chaque $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left| \sum_{k=0}^{n} x_k q_k(re^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2.$$

Mais r étant fixé, nous pouvons passer à la limite sous le signe d'intégrale en faisant n tendre vers l'infini. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 |\omega(re^{i\lambda})|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \tag{37}$$

c.-à-d. la fonction (36) appartient à la classe H_2.

Considérons maintenant les coefficients de Fourier de la fonction $\omega(e^{i\lambda})$.

$$y_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \omega(e^{i\lambda}) \overline{q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda. \tag{38}$$

Nous devons démontrer que

$$y_m = x_m \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Faisons en premier lieu une remarque. Supposons que les fonctions

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

et

$$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$$

appartiennent à la classe H_2. Nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(re^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(re^{i\lambda})}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}\, r^{2k}$$

les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2$$

étant convergentes. De l'autre côté il est connu que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(e^{i\lambda})}\,d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

et il est facile de conclure que dans ce cas:

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(re^{i\lambda})\,\overline{\varphi_2(re^{i\lambda})}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(e^{i\lambda})\cdot\overline{\varphi_2(e^{i\lambda})}\,d\lambda.$$

En posant

$$\varphi_1(z) = D(z)\,\omega(z); \quad \varphi_2(z) = D(z)\,q_m(z)$$

nous pouvons écrire au lieu de (38)

$$y_m = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2\,\omega(re^{i\lambda})\,\overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda,$$

ou

$$y_m = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left(\sum_{k=0}^{p} x_k q_k(re^{i\lambda})\right) \overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda +$$

(39)

$$+ \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\lambda})|^2 \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} x_k q_k(re^{i\lambda})\right) \overline{q_m(re^{i\lambda})}\,d\lambda.$$

Le premier terme de la partie droite est égal évidemment à x_m pour $p \geqslant m$. Le carré du module du second terme n'est pas supérieur à l'expression:

$$\max |q_m(e^{i\lambda})|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left| \omega(e^{i\lambda}) - \sum_{k=0}^{p} x_k q_k(e^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda.$$

Mais la formule (37) nous donne:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left| \omega(e^{i\lambda}) - \sum_{k=0}^{p} x_k q_k(e^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} |x_k|^2$$

et par conséquent le second terme doit tendre vers zéro pour $p \to \infty$. En tenant compte que la partie gauche de la formule (39) ne dépend pas de p nous pouvons conclure que $y_m = x_m$ et notre deuxième assertion est démontrée.

Les nombres x_k étant les coefficients de Fourier de la fonction $\omega(e^{i\lambda})$ nous avons l'inégalité de Bessel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \, |\omega(e^{i\lambda})|^2 \, d\lambda \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2$$

et en tenant compte de la formule (37), nous aurons l'équation de la fermeture pour la fonction $\omega(e^{i\lambda})$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \, |\omega(e^{i\lambda})|^2 \, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2. \tag{40}$$

Nous allons démontrer maintenant que si la fonction $F(z)$ régulière à l'intérieur du cercle K est telle que le produit $D(z)F(z)$ appartient à la classe H_2 cette fonction $F(z)$ est développable en série de Fourier de la forme (34) pour laquelle la série (35) converge.

Formons la série de Fourier pour la fonction $F(z)$:

$$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z)$$

et introduisons la fonction:

$$F_1(z) = F(z) - \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z).$$

Comme nous avons démontré plus haut le produit

$$D(z) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z)$$

appartient à la classe H_2 car la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2$$

est évidemment convergente. D'autre part le produit $D(z) \cdot F(z)$ appartient à la classe H_2 par supposition, d'où il suit que le produit $D(z)\, F_1(z)$ appartient aussi à la classe H_2. Mais par définition de la fonction $F(z)$ tous les coefficients de Fourier de cette fonction sont égaux à zéro, car les coefficients de Fourier de la fonction

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z)$$

sont égaux à x_k comme nous avons démontré plus haut. Par conséquent pour chaque polynôme $Q(z)$ a lieu la formule:

$$(41) \quad \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 F_1(e^{i\lambda}) \overline{Q(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \int_0^{2\pi} \overline{D(e^{i\lambda})\, Q(e^{i\lambda})}\, D(e^{i\lambda}) F_1(e^{i\lambda})\, d\lambda = 0.$$

Mais comme nous avons démontré dans notre mémoire cité plus haut* pour chaque nombre entier $m \geqslant 0$ il existe une telle suite des polynômes $Q_n(z)$ que

$$(42) \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\, Q_n(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda = 0.$$

En tenant compte de la formule (41) nous pouvons écrire:

$$I_m = \int_0^{2\pi} \overline{(e^{i\lambda})^m}\, D(e^{i\lambda})\, F_1(e^{i\lambda})\, d\lambda = \int_0^{2\pi} \overline{[(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\, Q_n(e^{i\lambda})]}\, D(e^{i\lambda}) F_1(e^{i\lambda})\, d\lambda,$$

d'où il suit

$$|I_m|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})\, F_1(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda \cdot \int_0^{2\pi} |(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\, Q_n(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda$$

* Smirnoff. Journ. Soc. Phys.-Math. Leningrad, t. II, fasc., I, 1928.

L'intégrale I_m ne dépend pas de n et la formule (42) nous donne:

$$I_m = \int_0^{2\pi} \overline{(e^{i\lambda})^m}\, D(e^{i\lambda})\, F_1(e^{i\lambda})\, d\lambda = 0$$

ou

$$\int_0^{} \frac{D(z')\, F_1(z')}{z'^{m+1}}\, dz' = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

Mais la fonction $D(z)F_1(z)$ appartient à la classe H_2 et s'exprime par suite par la formule de Cauchy

$$D(z)\, F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0 \frac{D(z')\, F_1(z')}{z' - z}\, dz'$$

et les conditions (43) montrent, que la fonction $F_1(z)$ est égale à zéro ou

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, q_k(z)$$

c.-à-d. la fonction $F(z)$ est développable en série de Fourier. Les considérations ci-dessus nous conduisent au théorème suivant: l'ensemble des séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\, q_k(z) \tag{44}$$

pour lesquelles

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2$$

sont convergentes est l'ensemble des séries de Fourier de telles fonctions $F(z)$ que $D(z)F(z)$ appartient à la classe H_2 et la série converge uniformément vers $F(z)$ pour $|z| \leqslant r < 1$.

10. Dans le paragraphe précédent nous avons cité le théorème suivant: si la fonction $D(z)$ a la représentation de la forme:

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)}\, \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, d\lambda, \tag{45}$$

où $p(\lambda) \geqslant 0$, $p(\lambda)$ et $\lg p(\lambda)$ étant sommables, il éxiste pour chaque valeur entière $m \geqslant 0$ une telle suite des polynômes $Q_n(z)$ que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |(e^{i\lambda})^m - D(e^{i\lambda})\, Q_n(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda = 0.$$

Nous voulons maintenant donner la démonstration de ce théorème. Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour $m = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |1 - D(e^{i\lambda})\, Q_n(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda = 0. \tag{46}$$

Prenons la fonction

$$\omega_1(z) = \frac{1}{D(z)}. \tag{47}$$

dont les coefficients de Fourier par rapport aux polynômes $q_m(z)$ seront

$$d_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2\, \omega_1(e^{i\lambda})\, \overline{q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{D(e^{i\lambda})\, q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda$$

ou

$$\overline{d_m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D(e^{i\lambda})\, q_m(e^{i\lambda})\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{D(z')\, q_m(z')}{z'}\, dz'. \tag{48}$$

En rémarquant que la fonction $D(z)\, q_m(z)$ appartient à la classe H_2 et, en particulier, qu'elle est représentable par la formule de Cauchy nous recevons:

$$d_m = \overline{D(0)\, q_m(0)}. \tag{49}$$

Posons

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k\, q_k(z). \tag{50}$$

et considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2\, |\omega_1(e^{i\lambda}) - Q_n(e^{i\lambda})|^2\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left[\frac{1}{D(e^{i\lambda})} - Q_n(e^{i\lambda})\right]\overline{\left[\frac{1}{D(e^{i\lambda})} - Q_n(e^{i\lambda})\right]}\, d\lambda.$$

En tenant compte de (48) et (50) nous obtenons:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2\,|\omega_1(e^{i\lambda})-Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 1 +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})\,d\lambda =$$

$$= 1-\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2$$

ou en tenant compte de (47)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-D(e^{i\lambda})\,Q_n(e^{i\lambda})|^2\,d\lambda = 1-\sum_{k=0}^{n}|d_k|^2.$$

La formule (46) est équivalente à la formule

$$(51_1)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|d_k|^2 = 1$$

ou en vertue de (49) à la formule

$$(51_2)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|q_k(0)|^2 = \frac{1}{|D(0)|^2}.$$

L'égalité (51_1) ou (51_2) exprime la formule de la fermeture pour la fonction $\omega_1(z)$

Pour démontrer l'égalité (51_1) nous supposerons en premier lieu que la fonction $p(\lambda)$ qui fait partie de la formule (45) satisfasse à l'inégalité

$$p(\lambda)\geqslant m>0 \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi)$$

où m est un nombre positif donné.

Dans ce cas

$$|D(z)| = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\sqrt{p(\lambda)}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\lambda)+r^2}\,d\lambda \geqslant e^{\lg\sqrt{m}} =$$

$$= \sqrt{m} \quad (z=re^{i\varphi})$$

et par conséquent

$$|\omega_1(z)| = \frac{1}{|D(z)|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}$$

c.-à-d. la fonction $\omega_1(z)$ et bornée dans le cercle K. Mais pour une telle fonction il est aisé de demontrer la formule de la fermeture. Soit en effet $S_n(z)$ les sommes de Fejer pour les segments de la série de Maclaurin de la fonction $\omega_1(z)$. Ces sommes $S_n(z)$ sont, comme il est bien connu, aussi bornées et elles tendent presque partout sur la circonférence $|z| = 1$ vers les valeurs limites $\omega_1(z)$. Nous pouvons donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 |\omega_1(e^{i\lambda}) - S_n(e^{i\lambda})| \, d\lambda = 0.$$

Si nous substituons au lieu de $S_n(z)$ les segments de la série de Fourier de la fonction $\omega_1(z)$ la valeur de l'intégrale ne peut pas augmenter et nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 \left| \omega_1(e^{i\lambda}) - \sum_{k=0}^{n} d_k q_k(e^{i\lambda}) \right|^2 d\lambda = 0$$

c.-à-d. la formule de la fermeture a lieu pour $\omega_1(z)$.

Prenons maintenant le cas général où $p(\lambda) \geqslant 0$. Il est facile de voir que pour le nombre positif donné ε la fonction $\lg[p(\lambda) + \varepsilon]$ est la fonction sommable et on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \lg[p(\lambda) + \varepsilon] \, d\lambda = \int_0^{2\pi} \lg p(\lambda) \, d\lambda. \tag{52}$$

En effet divisons l'intervalle (0.2π) en trois parties: 1) la partie F_1 où $p(\lambda) > M$; 2) la partie F_2 où $p(\lambda) < \frac{1}{M}$; 3) la partie F_3 où

$$M \geqslant p(\lambda) \geqslant \frac{1}{M},$$

M étant un nombre positif assez grand. Dans la partie F_1 nous avons

$$\lg[p(\lambda) + \varepsilon] < \lg[2p(\lambda)]$$

et dans la partie F_2:

$$|\lg[p(\lambda) + \varepsilon]| < |\lg p(\lambda)|,$$

c.-à-d. dans ces deux parties la valeur absolue de la fonction $\lg[p(\lambda)+\varepsilon]$ est moindre que celle d'une fonction sommable et on peut par suite passer à la limite sous le signe l'intégrale dans les parties F_1 et F_2. Pour la partie F_3

$$\lg[p(\lambda)+\varepsilon]$$

est la fonction bornée et on peut aussi passer à la limite sous le signe de l'intégrale. Nous avons donc la formule (52)

Prenons ensuite les intégrales:

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(e^{i\lambda})|^2|1+a_1e^{i\lambda}+a_2e^{i2\lambda}+\ldots+a_ne^{in\lambda}|^2\,d\lambda.$$

En répétant les raisonnements du 7 on peut démontrer que le minimum de l'intégrale I_n est égal à

$$\mu_n=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}|q_k(0)|^2}.$$

Soit

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\mu_n.$$

On peut écrire la formule (51_2) sous la forme

$$\mu=|D(0)|^2.$$

Désignons par $D^{(\varepsilon)}(z)$, $\mu_n^{(\varepsilon)}$ et $\mu^{(\varepsilon)}$ — les valeurs de $D(z)$, μ_n, et μ dans le cas où nous avons changé $p(\lambda)$ en $p(\lambda)+\varepsilon$. Dans ce cas nous avons démontré la formule (51_2) c.-à-d.

$$\mu^{(\varepsilon)}=|D^{(\varepsilon)}(0)|^2$$

où

$$|D^{(\varepsilon)}(0)|^2=\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg[p(\lambda)+\varepsilon]\,d\lambda.$$

Nous avons encore les inégalités:

$$|D^{(\varepsilon)}(z)|\geqslant|D(z)|;\ |D^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})|\geqslant|D(e^{i\lambda})|$$

$$\mu_n^{(\varepsilon)}\geqslant\mu_n;\ \mu^{(\varepsilon)}\geqslant\mu.$$

d'où il suit

$$\mu \leqslant |D^{(\varepsilon)}(0)|^2$$

et en faisant tendre ε vers zéro:

$$\mu \leqslant |D(0)|^2.$$

D'autre part l'inégalité de Bessel nous donne:

$$\mu \geqslant |D(0)|^2$$

et par conséquent

$$\mu = |D(0)|^2$$

c. q. f. d.

Dans notre mémoire cité plus haut nous avons démontre le théorème, signalé au debut de ce paragraphe, en nous servant de quelques résultats de M. Szegö.* Ici nous avons donné la démonstration complète et cette démonstration contient quelques traits essentiels des raisonnements de M. Szegö.

11. Revenons aux considérations du domaine géneral B du type α, mais supposons qu'il n'a pas de points de ramification. Soit, comme plus haut, $x = \psi(z)$ — la fonction, qui fait la représentation conforme du cercle C sur le domaine B et $z = \chi(x)$ — la fonction inverse. Construisons la fonction maximale $D(z)$ du module limite:

$$|D(e^{i\lambda})|^2 = \frac{2\pi}{l} |\psi'(e^{i\lambda})|.$$

Les polynômes correspondants $q_n(z)$ peuvent être obtenus dans ce cas par l'orthogonalisation des fonctions

$$1, \chi(x), \{\chi(x)\}^2, \{\chi(x)\}^3, \ldots$$

le long du contour Γ du domaine B. En effet les conditions

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D(e^{i\lambda})|^2 q_m(e^{i\lambda}) \overline{q_m(e^{i\lambda})}\, d\lambda = \varepsilon_{n,m}$$

ont dans ce cas sur le plan x la forme:

$$\frac{1}{l} \int_\Gamma^l q_m[\chi(\xi)]\, q_n[\chi(\xi)]\, ds = \varepsilon_{n,m}.$$

* Szegö, Math. Ztschr., Bd. 6, H. 3/4, 1920; Bd. 9 H. 3/4, 1921.

Si la représentation paramétrique de la fonction $\psi'(z)$ a la forme (19) c.-à-d. ne contient pas le terme avec l'intégrale de Stieltjès cette fonction $\psi'(z)$ donne la fonction maximale:

$$D(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}\psi'(z)}.$$

Les développements

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(z), \tag{53}$$

où

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \tag{54}$$

sont convergents, donnent la classe des fonctions $\omega(z)$ telles, que le produit

$$D(z)\omega(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\psi'(z)}\,\omega(z)$$

appartient à la classe H_2 ou $\omega[\chi(x)]$ appartient à la classe E_2 c.-à-d. les intégrales

$$\int_{\Gamma_r} |\omega[\chi(x)]|^2 ds$$

restent bornées. Ainsi les développements suivant les fonctions orthogonales $q_k[\chi(x)]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k[\chi(x)] \tag{55}$$

où la série (54) converge, donnent la classe des fonctions $f(x)$, qui appartiennent à E_2 c.-à-d. pour lesquelles les intégrales

$$\int_{\Gamma_r} |f(\xi)|^2 ds \tag{56}$$

restent bornées. Les fonctions fondamentales $q_n[\chi(x)]$ sont dans ce cas des fonctions bornées.

Supposons maintenant que la représentation paramétrique de la fonction $\psi'(z)$ contienne l'intégrale de Stieltjès:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{l}}\sqrt{\psi'(z)} = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg\sqrt{p(\lambda)}\,\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,d\lambda \cdot \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}\,dq(\lambda), \tag{57}$$

et dans ce cas la fonction maximale sera:

$$D(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda. \tag{58}$$

Considérons la fonction $\pi(x)$, définie par la formule:

$$\frac{1}{\pi(x)} = \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} dq(\lambda).$$

Cette fonction $\pi(x)$ à l'intérieur de B a le module plus grand que l'unité et sur le contour Γ son module est presque partout égal à unité. Les développements (53), où la série (54) converge, donnent les fonctions $\omega(z)$ telles que le produit

$$D(z)\omega(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{l}} \sqrt{\psi'(z)}\, \pi[\psi(z)]\, \omega(z)$$

appartient à la classe H_2 et les développements (55) donnent les fonctions $f(x)$ telles que le produit $\pi(x) f(x)$ aopartient à la classe E_2 c.-à-d. les intégrales

$$\int_{\Gamma_r} |\pi(\xi) f(\xi)|^2 ds \tag{59}$$

restent bornées. Si la fonction $f(x)$ est bornée cette condition est certainement satisfaite, car dans ce cas le produit

$$f[\psi(z)]\, \pi[\psi(z)]\, \sqrt{\psi'(z)} = f[\psi(z)] \sqrt{\frac{l}{2\pi}} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \sqrt{p(\lambda)} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} d\lambda$$

appartient à la classe H_2. Ainsi l'ensemble des fonctions orthogonales $q_m[\chi(z)]$ présente le système complet des fonctions orthogonales pour la classe des fonctions bornées dans le domaine B et si le système des fonctions orthogonales bornées $r_m(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ s'exprime par les fonitions $q_m[\chi(z)]$ au moyen d'une transformation orthogonale complète, on a la formule de fermeture et le théorème du développement suivant $r_m(x)$ pour chaque fonction $f(x)$ telle, que les intégrales (59) restent bornées. Si nous voulons obtenir le théorème du développement pour les fonctions de la classe E_2 c.-à-d. pour telles fonctions, que les intégrales (56) restent bornées, nous devons ajouter au système des fonctions $r_m(x)$ de nouvelles fonctions, qui sont non bornées dans le domaine B mais appartiennent dans ce domaine à la classe E_2.

On peut obtenir des résultats analogues encore pour le cas général, où le domaine B contient les points de ramification. Dans ce cas la représentation paramétrique de la fonction $\psi'(z)$ contient la fonction de Blaschke $b(z)$:

$$(60)\quad \frac{2\pi}{l}\psi'(z) = b(z)\cdot \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lg p(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda \cdot \exp\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}dq(\lambda),$$

où $\lg p(\lambda)$ et $p(\lambda)$ sont les fonctions sommables.

La fonction maximale $D(z)$ est définie par la formule (58), comme dans le cas précédent. Supposons en premier lieu, que la formule (60) ne contient pas l'intégrale de Stieltjès et soit $f(x)$ — la fonction de la classe E_2 dans le domaine B. Le produit

$$(61)\qquad \{f[\psi(z)]\}^2\psi'(z)$$

appartient à la classe H_1 et pour $\psi'(z)$ nous avons:

$$\frac{2\pi}{l}\psi'(z) = b(z)\cdot \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg p(\lambda)\frac{e^{i\lambda}+z}{e^{i\lambda}-z}d\lambda.$$

Si nous excluons du produit (61) la fonction $b(z)$ nous obtenons le produit

$$\{f[\psi(z)]\}^2\{D(z)\}^2$$

qui appartient aussi à la classe H_1,* et par suite le produit

$$f[\psi(z)]\,D(z)$$

appartient à la classe H_2. Par conséquent si la formule (60) ne contient pas l'intégrale de Stieltjès le théorème du développement à lieu pour chaque fonction $f(x)$ de la classe E_2.

Si la formule (60) contient l'intégrale de Stieltjès, la condition nécessaire et suffisante pour la formule de fermeture et le théorème du développement est, que les intégrales (59) restent bornées.

* F. Riesz, l. c.

В. И. СМИРНОВ. О ФОРМУЛАХ КОШИ И ГРИНА И НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, К НИМ ОТНОСЯЩИХСЯ

РЕЗЮМЕ

Пусть $f(x)$ — регулярная функция в односвязной, однолистной области B со спрямляемым контуром Г. Автор устанавливает необходимые и достаточные условия того, чтобы имели место формулы Коши и Грина

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - x}\,d\xi$$

(x — внутри B)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} f(\xi)\,\frac{\partial G(\xi\,;x)}{\partial n}\,ds,$$

где $G(x_1\,;x)$ — функция Грина с полюсом x, т. е. гармоническая внутри B функция, равная нулю на контуре Г и обращающаяся в бесконечность при $x_1 = x$, при чем разность

$$G(x_1\,;x) - \lg|x_1 - x|$$

остается гармонической и в точке $x_1 = x$. Направление n есть направление внешней нормали на Г и s — длина дуги этой кривой. Затем устанавливаются различные свойства регулярной функции, для которой имеет место формула Коши, и выясняется вопрос о том, в какой мере одна из вышеупомянутых формул есть следствие другой.

Во второй части работы рассматриваются системы регулярных функций в области B, ортогональных на кривой Г, при чем область B не предполагается однолистной. Выясняется вопрос о замкнутости таких систем. Для этой цели разбирается вопрос о замкнутости системы полиномов $q_n(x)$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$), ортогональных на окружности $|x| = 1$ с заданным неотрицательным весом $p(\theta)$, при чем $p(\theta)$ и $\lg p(\theta)$ считаются суммируемыми функциями.

Упомянутые полиномы $q_n(x)$ степени n удовлетворяют условиям:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\,q_m(e^{i\theta})\,\overline{q_n(e^{i\theta})}\,d\theta = \begin{matrix} 0\ (m \neq n) \\ 1\ (m = n) \end{matrix}$$

Символ $\overline{\alpha}$ обозначает комплексное число, сопряженное с α.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СОКРАЩЕННАЯ ФОРМА МНОГОЗНАЧНЫХ ТАБЛИЦ ЛОГАРИФМОВ ЧИСЕЛ

Б. В. НУМЕРОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Вопрос об издании многозначных логарифмических таблиц 8-ми и 10-ти знаков представляет сложную задачу, ибо таблицы в обычной форме сводятся ко многим сотням страниц и опубликование их представляет значительные трудности. Полагая, что многозначные вычисления не являются обычным делом при вычислениях, а к ним приходится прибегать только в исключительных случаях, при построении таблиц можно отказаться от линейной интерполяции. Придерживаясь интерполирования с высшими разностями, в более упрощенной форме, чем это делается обычно, можно логарифмические таблицы издать в более компактной форме. Так, например, 6-значные логарифмы чисел можно поместить на 3 стр. при условии, что при интерполировании мы будем пользоваться или арифмометром, или 5-значными логарифмами. 8-значные таблицы можно издать на 11 стр., используя при интерполировании 6-значные логарифмы и, наконец, 10-значные логарифмические таблицы чисел можно опубликовать на 91 стр., используя при интерполировании 7-значные логарифмы.

Прямое интерполирование во всех случаях можно производить по формуле:

$$\Delta = \lg x - \lg x_0 = nf - \delta \qquad (1)$$

где $x - x_0 = n$ есть доля интервала, всегда меньшая единицы, далее

$$f = \frac{M}{x} \qquad (2)$$

есть производная от десятичного логарифма M — модуль для перехода от натуральных логарифмов к десятичным, ($M = 0.43429448$, $M^{-1} = 2.3025851$, $\lg M = 9.63778431$), и, наконец,

$$\delta = \frac{1}{2M}(nf)^2 - \frac{1}{3M^2}(nf)^3 + \frac{1}{4M^3}(nf)^4 + \ldots \qquad (3)$$

дополнительный член, зависящий от высших порядков при разложении логарифма в ряд Тейлора. Функция δ может быть табулирована по аргументу (nf).

При обратном переходе от логарифмов к числам можно пользоваться формулой

$$n = (\Delta + \delta) f^{-1} \tag{4}$$

причем функция δ берется по аргументу Δ.

$$\delta = \frac{1}{2M}\Delta^2 + \frac{1}{6M^2}\Delta^3 + \frac{1}{24M^3}\Delta^4 \ldots \tag{5}$$

В таблице (1) 6-значных логарифмов в 1-м столбце дан аргумент, меняющийся через единицу от 10 до 100. Во 2-м столбце дана 6-значная мантисса, в 3-м столбце — производная f в 6-м десятичном знаке, в 4-м столбце — обратная величина от производной, в 9-ом знаке, для нахождения числа по логарифму и, наконец, в 5-м столбце — 5-значный логарифм производной для интерполирования, не пользуясь арифмометром. Дополнительный член в единицах 6-го знака дан в таблице 2 по аргументу произведения $(nf \cdot 10^3)$. Для вычисления дополнительного члена δ согласно формуле (3) может служить формула:

$$\delta . 10^6 = (nf . 10^3)^2 11513 . 10^{-4} - (nf . 10^3)^3 1767 . 10^{-6} + \\ + (nf . 10^3)^4 305 . 10^{-8} - (nf\, 10^3)^5 56 . 10^{-10} \ldots \tag{6}$$

При обратном интерполировании, при нахождении чисел по логарифмам, дополнительный член берется по таблице 3 по аргументу разности

$$\Delta = \lg x - \lg x_0$$

между заданным логарифмом и ближайшим табличным логарифмом, выраженной в единицах 3-го знака.

В таблице (4) 8-значных логарифмов даны для образца только начало и конец таблицы. В полной таблице будет всего 900 значений аргумента от 100 до 1000 через единицу. Во 2-м столбце дана 8-значная мантисса, в 3-м столбце — производная f в 8-м десятичном знаке, в 4-м столбце — обратная величина и, наконец, в 5-м столбце — шестизначный логарифм производной f.

В таблице 5 дан дополнительный член $\delta . 10^8$ по аргументу произведения $(nf . 10^4)$, следуя формуле

$$\delta . 10^8 = (nf . 10^4)^2 11513 . 10^{-4} - (nf . 10^4)^3 1767 . 10^{-7} + \\ + (nf . 10^4)^4 305 . 10^{-10} \tag{7}$$

Для обратного интерполирования таблица 6 дает дополнительный член $\delta . 10^8$ по аргументу $nf . 10^4$ разности логарифмов согласно формуле (5).

В таблице (7) 10-значных логарифмов также даны для образца только начало и конец таблицы. В полной таблице будет всего 9000 значений аргумента от 1000 до 10000 через единицу.

Во 2-м столбце дана 10-значная мантисса, в 3-м столбце — производная f в 10-м десятичном знаке, в 4-м — столбце обратная величина и, наконец, в 5-м — 7-значный логарифм производной f.

В таблице 8 дан дополнительный член $\delta.10^{10}$ по аргументу произведения $(nf.10^5)$, следуя формуле

$$\delta.10^{10} = (nf.10^5)^2\,11513.10^{-4} - (nf.10^5)^3\,1767.10^{-8} \qquad (8)$$

Той же таблицей 8 можно пользоваться для вычисления дополнительного члена $\delta.10^{10}$ по аргументу $\Delta.10^5$. Для большей точности следует входить с аргументом $\Delta + \delta$, т. е. производить два приближения. Однако при интерполировании от ближайшего табличного значения логарифма при вычислении дополнительного члена δ не потребуется второго приближения.

При образовании произведения $(\Delta + \delta)f^{-1} = n$ следует при 6-значных вычислениях отделить 9 цифр, при 8-значных — 11 цифр и при 10-значных вычислениях — 13 цифр.

Рассмотрим ряд примеров:

Пример 1. Найти 6-значный логарифм числа $x = 2948.65$

$\lg 29$	462 398	(табл. 1)
$nf =$	7 286	
$\delta =$	— 60	(табл. 2)
$\lg x = 3.469\,624$		

Пример 2. Найти 8-значный логарифм числа $x = 9.9623457$

$\lg 996$	0.9982 5934	(табл. 4)
$nf =$	1 0228	
$\delta =$	— 1	(табл. 5)
$\lg x = 0.9983\,6161$		

Пример 3. Найти по 10-значному логарифму $\lg x = 4.0016799188$ число.

$\lg x = 4.00167\,99188$		(табл. 7)
$\lg 1003 =$	00130 09330	
$\Delta =$	37 89858	
$\delta =$	1654	(табл. 8)
$\Delta + \delta =$	37 91512	
$x =$	10038.75647	

Таблица 1 (6-значные логарифмы)

x	$\lg x$	f	f^{-1}	$\lg f$	x	$\lg x$	f	f^{-1}	$\lg f$
10	000000	43429	23026	4.63778	55	740363	7896	126642	3.89742
11	041393	39481	25328	4.59639	56	748188	7755	128945	3.88960
12	079181	36191	27631	4.55860	57	755875	7619	131247	3.88191
13	113943	33407	29934	4.52384	58	763428	7488	133550	3.87436
14	146128	31021	32236	4.49166	59	770852	7361	135853	3.86693
15	176091	28953	34539	4.46169	60	778151	7238	138155	3.85963
16	204120	27143	36841	4.43366	61	785330	7120	140458	3.85245
17	230449	25547	39144	4.40734	62	792392	7005	142760	3.84539
18	255273	24127	41447	4.38251	63	799341	6894	145063	3.83844
19	278754	22858	43749	4.35903	64	806180	6786	147365	3.83160
20	301030	21715	46052	4.33675	65	812913	6681	149668	3.82487
21	322219	20681	48354	4.31575	66	819544	6580	151971	3.81824
22	342423	19741	50657	4.29536	67	826075	6482	154273	3.81171
23	361728	18882	52959	4.27606	68	832509	6387	156576	3.80528
24	380211	18096	55262	4.25757	69	838849	6294	158878	3.79894
25	397940	17372	57565	4.23984	70	845098	6204	161181	3.79269
26	414973	16704	59867	4.22281	71	851258	6117	163484	3.78653
27	431364	16085	62170	4.20642	72	857332	6032	165786	3.78045
28	447158	15511	64472	4.19063	73	863323	5949	168089	3.77446
29	462398	14976	66775	4.17539	74	869232	5869	170391	3.76855
30	477121	14476	69078	4.16066	75	875061	5791	172694	3.76272
31	491362	14010	71380	4.14642	76	880814	5714	174996	3.75697
32	505150	13572	73683	4.13263	77	886491	5640	177299	3.75129
33	518514	13160	75985	4.11927	78	892095	5568	179602	3.74569
34	531479	12774	78288	4.10630	79	897627	5497	181904	3.74016
35	544068	12408	80590	4.09372	80	903090	5429	184207	3.73469
36	556303	12064	82893	4.08148	81	908485	5362	186509	3.72930
37	568202	11738	85196	4.06958	82	913814	5296	188812	3.72397
38	579784	11429	87498	4.05800	83	919078	5232	191115	3.71871
39	591065	11136	89801	4.04672	84	924279	5170	193417	3.71350
40	602060	10857	92103	4.03572	85	929419	5109	195720	3.70836
41	612784	10593	94406	4.02500	86	934498	5050	198022	3.70329
42	623249	10340	96709	4.01454	87	939519	4992	200325	3.69826
43	633468	10100	99011	4.00432	88	944483	4935	202627	3.69330
44	643453	9870	101314	3.99433	89	949390	4880	204930	3.68839
45	653213	9651	103616	3.98457	90	954243	4825	207233	3.68354
46	662758	9441	105919	3.97503	91	959041	4772	209535	3.67874
47	672098	9240	108221	3.96567	92	963788	4721	211838	3.67400
48	681241	9048	110524	3.95654	93	968483	4670	214140	3.66930
49	690196	8863	112827	3.94759	94	973128	4620	216443	3.66466
50	698970	8686	115129	3.93881	95	977724	4572	218746	3.66006
51	707570	8516	117432	3.93021	96	982271	4524	221048	3.65551
52	716003	8352	119734	3.92178	97	986772	4477	223351	3.65101
53	724276	8194	122037	3.91351	98	991226	4432	225653	3.64656
54	732394	8042	124340	3.90539	99	995635	4387	227956	3.64215

Таблица 2

Дополнительный член δ по аргументу (nf). 10^3 в единицах 6-го знака
(при нахождении логарифма по числу)

nf .(10)^3	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.10
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	5
2	5	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10
3	10	11	12	13	13	14	15	16	16	17	18
4	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
5	28	30	31	32	33	34	36	37	38	40	41
6	41	42	44	45	47	48	50	51	53	54	56
7	56	57	59	61	62	64	66	68	69	71	73
8	73	75	76	78	80	82	84	86	88	90	92
9	92	94	96	98	100	102	104	107	109	111	113
10	113	116	118	120	122	125	127	130	132	134	137
11	137	139	142	144	147	150	152	155	157	160	163
12	163	166	168	171	174	176	179	182	185	188	191
13	191	194	197	200	202	206	209	212	215	218	221
14	221	224	227	230	234	237	240	243	247	250	253
15	258	257	260	263	267	270	274	277	281	284	288
16	288	291	295	298	302	306	309	313	317	320	324
17	324	328	332	336	340	343	347	351	355	359	363
18	363	367	371	375	379	383	387	391	396	400	404
19	404	408	412	417	421	425	430	434	438	442	447
20	447	451	456	460	465	469	474	478	483	487	492
21	492	496	501	506	510	515	520	525	530	534	539
22	539	544	549	554	559	564	568	573	578	583	588
23	588	593	598	604	609	614	619	624	629	634	640
24	640	645	650	656	661	666	672	677	682	688	693
25	693	698	704	710	715	720	726	732	737	743	748
26	748	754	760	766	771	777	783	788	794	800	806
27	806	812	818	824	830	836	842	848	854	860	866
28	866	872	878	884	890	896	902	908	915	921	927
29	927	934	940	946	952	959	965	972	978	984	991
30	991	997	1004	1010	1017	1023	1030	1036	1043	1050	1056
31	1056	1063	1070	1076	1083	1090	1097	1104	1110	1117	1124
32	1124	1131	1138	1145	1152	1159	1166	1173	1180	1187	1194
33	1194	1201	1208	1215	1222	1229	1236	1244	1251	1258	1265
34	1265	1272	1280	1287	1294	1302	1309	1316	1324	1331	1339
35	1339	1346	1354	1361	1369	1376	1384	1392	1399	1407	1414
36	1414	1422	1430	1437	1445	1453	1461	1468	1476	1484	1492
37	1492	1500	1508	1516	1524	1531	1539	1547	1555	1563	1571
38	1571	1580	1588	1596	1604	1612	1620	1628	1636	1645	1653
39	1653	1661	1669	1678	1686	1694	1703	1711	1719	1728	1736
40	1736	1745	1753	1762	1770	1779	1787	1796	1804	1813	1822
41	1822	1830	1839	1848	1856	1865	1874	1882	1891	1900	1909
42	1909	1918	1926	1935	1944	1953	1962	1972	1980	1989	1998
43	1998	2007	2016	2025	2034	2043	2052	2062	2071	2080	2089

Таблица 3

Дополнительный член δ по аргументу $\Delta.10^3$ в единицах 6-го знака
(при нахождении числа по логарифму)

$\Delta.10^3$	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.10
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
2	5	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10
3	10	11	12	13	13	14	15	16	17	18	18
4	18	19	20	21	22	23	24	26	27	28	29
5	29	30	31	32	34	35	36	38	39	40	42
6	42	43	44	46	47	48	50	52	54	55	57
7	57	58	60	62	63	65	67	69	70	72	74
8	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94
9	94	96	98	100	102	105	108	109	111	114	116
10	116	118	121	123	126	128	130	133	135	138	140
11	140	143	146	148	151	154	156	159	162	164	167
12	167	170	173	176	179	182	185	188	191	194	197
13	197	200	203	206	209	212	215	218	222	225	228
14	228	231	235	238	241	245	248	251	255	258	262
15	262	266	269	273	276	280	284	287	291	295	298
16	298	302	306	310	314	317	321	325	329	333	337
17	337	341	345	349	353	357	362	366	370	374	378
18	378	382	387	391	395	400	404	408	413	417	422
19	422	426	431	435	440	444	449	454	458	463	468
20	468	472	477	482	487	492	496	501	506	511	516
21	516	521	526	531	536	541	546	551	556	562	567
22	567	572	577	582	588	593	598	604	609	614	620
23	620	625	631	636	642	647	653	659	664	670	676
24	676	681	687	693	698	704	710	716	722	728	734
25	734	740	746	752	758	764	770	776	782	788	794
26	794	800	806	813	819	825	832	838	844	851	857
27	857	863	870	876	883	889	896	902	909	916	922
28	922	929	936	942	949	956	963	970	976	983	990
29	990	997	1004	1011	1018	1025	1032	1039	1046	1053	1060
30	1060	1068	1074	1082	1089	1096	1104	1111	1118	1126	1133
31	1133	1141	1148	1156	1163	1170	1178	1186	1193	1201	1208
32	1208	1216	1224	1231	1239	1247	1255	1262	1270	1278	1286
33	1286	1294	1302	1310	1318	1326	1334	1342	1350	1358	1366
34	1366	1374	1383	1391	1399	1407	1416	1424	1432	1441	1449
35	1449	1457	1466	1474	1483	1491	1500	1508	1517	1526	1534
36	1534	1543	1552	1560	1569	1578	1586	1595	1604	1613	1622
37	1622	1631	1640	1649	1652	1667	1676	1686	1694	1703	1712
38	1712	1721	1730	1740	1749	1758	1767	1777	1786	1795	1805
39	1805	1814	1824	1833	1843	1852	1862	1871	1881	1890	1900
40	1900	1910	1919	1929	1939	1948	1958	1968	1978	1988	1998
41	1998	2008	2018	2028	2038	2048	2058	2068	2078	2088	2098
42	2098	2108	2118	2128	2139	2149	2159	2170	2180	2190	2201
43	2201	2211	2222	2232	2242	2253	2264	2274	2285	2295	2306

Таблица 4 (8-значные логарифмы)

x	$lg\ x$	f	f^{-1}	$lg\ f$
100	00000000	434294	230259	5.637784
101	00432137	429994	232561	5.638463
102	00860017	425778	234864	5.629184
103	01283722	421645	237166	5.624947
104	01703334	417590	239469	5.620751
105	—	—	—	—
996	99825934	43604	2293375	4.639525
997	99869516	43560	2295677	4.639089
998	99913054	43516	2297980	4.638654
999	99956549	43473	2300283	4.638219
1000	00000000	43429	2302585	4.637784

Таблица 5

Дополнительный член δ по аргументу $(nf).10^4$ в единицах 8-го знака (при нахождении логарифма по числу)

$nf.10^4$	δ	$nf.10^4$	δ	$nf.10^4$	δ
0	0	15	258	30	1032
1	1	16	294	31	1101
2	5	17	332	32	1173
3	10	18	372	33	1248
4	18	19	414	34	1324
5	29	20	459	35	1403
6	42	21	506	36	1484
7	56	22	555	37	1567
8	74	23	607	38	1653
9	93	24	661	39	1741
10	115	25	717	40	1831
11	139	26	775	41	1923
12	166	27	836	42	2018
13	195	28	899	43	2114
14	225	29	964	44	2214

Таблица 6

Дополнительный член δ по аргументу $\Delta.10^4$ в единицах 8-го знака (при нахождении числа по логарифму)

$\Delta.10^4$	δ	$\Delta.10^4$	δ	$\Delta\ 10^4$	δ
0	0	15	259	30	1039
1	1	16	295	31	1109
2	5	17	333	32	1182
3	10	18	374	33	1257
4	18	19	416	34	1334

Продолжение таблицы 6.

$\Delta.10^4$	δ	$\Delta.10^4$	δ	$\Delta.10^4$	δ
5	29	20	461	35	1414
6	42	21	508	36	1496
7	56	22	558	37	1581
8	74	23	610	38	1667
9	93	24	664	39	1756
10	115	25	721	40	1848
11	139	26	780	41	1941
12	166	27	841	42	2038
13	195	28	905	43	2136
14	226	29	970	44	2236

Таблица 7 (10-значные логарифмы)

x	$lg\ x$	f	$f-1$	$lg\ f$
1000	0000000000	4342945	2302585	6.6377843
1001	0004340775	4338606	2304888	6.6373502
1002	0008677215	4334276	2307190	6.6369166
1003	0013009330	4329955	2309493	6.6364834
1004	0017337128	4325642	2311796	6.6360506
—	—	—	—	—
9996	9998262475	434468	23016641	5.6379581
9997	9998696921	434425	23018943	5.6379146
9998	9999131324	434381	23021246	5.6378712
9999	9999565684	434338	23023548	5.6378277
10000	0000000000	434294	23025851	5.6377843

Таблица 8

Дополнительный член δ по аргументу $nf.10^5=(\Delta+\delta).10^5$ в единицах 10-го знака

$nf.10^5$	δ	$nf.10^5$	δ	$nf.10^5$	δ
0	0	15	259	30	1036
1	1	16	294	31	1106
2	5	17	333	32	1178
3	10	18	373	33	1253
4	18	19	416	34	1330
5	29	20	460	35	1410
6	41	21	508	36	1491
7	56	22	557	37	1575
8	74	23	609	38	1662
9	93	24	663	39	1750
10	115	25	719	40	1841
11	139	26	778	41	1934
12	166	27	839	42	2030
13	195	28	902	43	2127
14	226	29	968	44	2227

Астрономический Институт, январь 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АТОМНОГО ВЕСА КАЛИЯ, ВЫДЕЛЕННОГО ИЗ ГОРОХА

В. Г. ХЛОПИНА и М. А. ПАСВИК-ХЛОПИНОЙ

(*Представлено академиком* В. И. Вернадским)

В 1926 г. акад. В. И. Вернадским в его работе «Изотопы и живое вещество»[1] была высказана гипотеза, согласно которой живые организмы обладают способностью в течение их жизни разделять изотопы и накоплять в своих тканях те изотопы, которые необходимы для построения и функционирования наиболее ответственных жизненных органов.

Основным следствием только что указанной гипотезы В. И. Вернадского должно было явиться то, что химические элементы играющие важную роль в жизненных процессах и выделенные из наиболее ответственных жизненных органов должны были бы обладать иным атомным весом, чем те же элементы, выделенные из мертвой природы. Эту разницу в атомном весе прежде всего можно было бы наблюдать у элементов, для которых характерны замкнутые жизненные циклы (железо, магний, может быть калий, кальций, сера и цинк). Объектом для настоящей работы был выбран калий. За такой выбор говорили беспорная, хотя до сих пор и не выясненная, роль калия в живых организмах, существование двух его изотопов, из которых только один радиоактивен,[2] а потому является носителем свободной энергии, которая могла бы объяснить его значение для жизни. Против говорит отсутствие каких-либо нам известных сложных органических комплексов, в состав которых входил бы калий и которые могли бы объяснить его участие в замкнутых жизненных циклах. Напротив новейшие исследования установили, что весь калий находится в растениях исключительно в виде ионов.[3]

[1] Изв. Акад. Наук, 1926, стр. 215—218.
[2] G. Hevesy, Nature, December 10, 1927, p. 838.
[3] С. П. Костычев и П. Элиасберг, Ztschr. f. physiol. Chemie, **111** (1920), 228.
[4] H. Zwaardemaker, Arch. ges. Physiol., **213** (1926), 82.

Физиологическое значение калия для животных и растений, несмотря на обилие литературы, посвященной этому вопросу и применение новейших методов для его решения, остается как мы уже указывали выше, до настоящего времени не выясненным и точки зрения отдельных исследователей подчас резко расходятся. Во всяком случае в отношении растений пока что считается установленным, что заменить калий другими элементами как то: натрием, литием, рубидием, цезием, не удается. В последнее время делаются попытки объяснить роль калия его радиоактивными свойствами.

Калий единственный радиоактивный элемент нормально в больших количествах встречающийся в растительных и животных клетках и его физиологическое действие согласно опытам Zwaardemaker'а может быть заменено другим излучением одинаковой силы. Автор ставил опыты с изолированным сердцем лягушки, употребляя растворы содержащие калий, торий, уран и эманацию радия. Опыты дали положительный результат. Естественно предположить, что радиоактивность калия и в растительных организмах будет играть ту же роль, некоторым подтверждением могут служить опыты Stoklasa (1920).[1] Автор изучал влияние калия на развитие растений и объясняет его биологическое значение радоактивными свойствами. Изучая влияние радиоактивности на обмен веществ в содержащих и не содержащих хлорофилл клетках он пришел к выводу, что в богатых калием растениях радиоактивность влияет пагубно. Кроме того в работах Г. А. Надсона и Н. А. Жолкевич[2] есть указание на то, что калий как бы предохраняет клетку от вредного действия лучей радия и Рентгена или во всяком случае смягчает его. Насколько высказанные предположения подтвердятся в будущем сказать трудно. Выяснение роли калия до настоящего времени привлекает внимание исследователей. В 1930 г. появилась работа F. N. Loring'а и Druce'а,[3] в которой авторы высказывают независимо ту же гипотезу, что и акад. В. И. Вернадский в 1926 г. Основываясь на работах Zwaardemaker'а о значении радиоактивности для жизни и хорошо известном факте о способности клетки избирательно адсорбировать соли калия из растворов содержащих калий и натрий, авторы предполагают, что основанием для такого избирательного поглощения служит потребность растения в радиоактивном изотопе калия. Высказанное предположение они проверяют экспериментально. Небольшой участок земли, предварительно вспаханный,

[1] I. Stoklasa. Über die Radioaktivität des Kaliums. Biochem. Zschr., **108** (1920).

[2] G. Nadson u. Zolkevic, Bioch. Ztschr., **163**, 4/6 (1925), 460; см. также Надсон и Жолкевич, Вестн. рентг. и радиол., III, вып. 2 (1924).

[3] Loring a. Druce, The Chemical News, January, **140** (1930), 34.

был удобрен 25 фун. хлористого калия и на нем посажено 200 экземпляров картофеля. Собранная ботва картофеля была сожжена и получено 20 фун. золы. Зола обрабатывалась водой. Для получения KCl фильтрат насыщался газообразным хлористым водородом. Полученный таким образом хлористый калий многократно выкристаллизовывался из горячей воды, причем бралась только средняя фракция. В результате многократных перекристаллизаций получено было только 8.5 г KCl. Проба на чистоту показала присутствие следов сульфатов. Спектроскопический анализ обнаружил только следы натрия, линии рубидия и цезия найдены не были. Определение атомного веса дало 40.5 т. е. цифру значительно превышающую нормальный атомный вес обычного калия. Действие на фотографическую бумагу соли, завернутой в черную бумагу дало заметный эффект уже через 7 дней. Причем получилась резкая разница в отпечатках обыкновенного калия и калия, выделенного из стеблей картофеля: в то время как обыкновенный калий давал едва заметное потемнение, калий выделенный из картофеля давал вполне определенный эффект; время экспозиции было то же самое. На основании своего опыта авторы приходят к выводу, что в данном случае как-будто происходит накопление изотопа с атомным весом 41, что является первым указанием на биологическое разделение изотопов. В работе H. H. Lowry «The atomic weight of potassium from plant ash»[1] предпринятой для проверки результатов Loring'a и Druce'a объектами исследования взяты 25 фун. семенных волосков хлопка и 75 фун. пшеничной муки. Обработка материала для получения калия велась тем же методом, что и в предыдущей работе, была применена та же дробная кристаллизация хлоридов. Определение атомного веса калия дало для золы хлопка 39.111 для золы пшеничной муки 39.091, т. е. оба определения дали в пределах ошибки нормальный атомный вес калия. Эти данные не подтверждают гипотезы выставленной Loring'ом и Druce'ом. Но автор считает, что его результатов быть может потому нельзя сравнивать с результатами вышеуказанных авторов, что им выбраны объекты для исследования морфологически отличные от картофеля. В 1931 г. Druce[2] уже один повторяет опыт со стеблями картофеля, определяя атомный вес золы калия, выделенного из ботвы картофеля, получает 40.8, 40.06, 40.2 — эти цифры являются подтверждением ранее произведенных опытов. Кроме того им был определен атомный вес калия из мертвого дерева — и получено

[1] H. H. Lowry. The atomic weight of potassium from plant ash. Journ. Amer. Chem. Soc., 52 (1930), 4332.

[2] J. G. F. Druce. The Chemical News, 142 (1931) 33.

39.11 — этот результат показывает, что в мертвом дереве накопления изотопа с большим атомным весом не происходит. Определение атомного веса из золы семян лупина дает опять накопление изотопа с атомным весом 41 так как атомный вес калия этой золы = 40.67. И наконец, определение атомного веса старого металлического калия дает опять цифру близкую к нормальному атомному весу т. е. 39.04. Опыты Druce'a казалось бы ясно говорят в пользу выставленной гипотезы о накоплении изотопа с большим атомным весом, только слишком большие расхождения в атомном весе из одной и той же средней пробы, как например это имеет место при определении атомного веса из стеблей картофеля, где колебания в атомном весе от 40.8 до 40.05 — делают эти опыты мало убедительными.

В августе 1931 г. в «Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie» напечатана статья Heller'a и Wagner'a.[1] Вышеуказанные авторы исследовали калий из золы листьев свеклы и Schlempekohle то же с целью выяснить происходит ли в растениях накопление радиоактивного изотопа. Метод выделения калия был несколько видоизменен по сравнению с предыдущими работами. Heller и Wagner применили очистку калия, переведя его через $KClO_4$ и потом получив из него KCl определяли атомный вес. Атомный вес листьев свеклы 39.09, 39.11, 39.08, а атомный вес Schlempekohle 39.14, 39.17. Действие на фотографическую пластинку то же самое, что и калия от Кальбаума pro Analysi mit Garantieschein. В этой работе, как и в вышеуказанной работе Lowry накопления изотопа с атомным весом 41 не происходит. Авторы приходят к заключению, что для того чтобы избежать прямого противоречия с результатами работ Loring'a и Druce'a необходимо допустить или что по окончании роста накопление изотопа прекращается и накопившийся изотоп покидает клетку и таким образом устанавливается нормальное соотношение, или что изотоп с атомным весом 41 в свекле не накопляется в таких количествах, как в картофеле. Оба указанные предположения проверяются. Калий выделяется как из картофеля, так и из свеклы во время их роста.

Для проверки гипотезы В. И. Вернадского нами были выбраны семена гороха и бобов, исходя из предположения, что радиоактивный изотоп будет концентрироваться в клетках, которые дают пищу для развития зародыша, т. е. в семенах. Испытав различные методы выделения калия из золы, мы остановились на очистке калия, переводя его через $KClO_4$. Для анализа было взято 3.5 кг сухих семян гороха. Озоление велось при невысоких

[1] Heller und C. Wagner. Zur Anzeicherung von Kaliumisotopen in Pflanzen. Ztschr. anorg. allgem. Chemie, 200, 105 (1931).

температурах во избежание потерь. Всего было получено золы 90 г. Для удаления труднорастворимых веществ зола выщелачивалась небольшим количеством воды. Фильтрат выпаривался до-суха и обрабатывался крепкой соляной кислотой. Для удаления SO_4 прибавлялся $BaCl_2$. По охлаждении раствор разводился водой, отфильтровывался от осадка. К прозрачной жидкости прибавлялась в избытке хлорная кислота. Раствор выпаривался на водяной бане до тех пор пока не прекращалось выделение паров хлорной кислоты. Жидкость охлаждалась, прибавлялся 96% спирт, содержащий 0.2% хлорной кислоты, осадок растирался стеклянной палочкой, промывался 96%-м спиртом, переносился на фильтр два раза промывался абсолютным спиртом и высушивался при 130°. Полученный таким образом $KClO_4$ перекристаллизовывался несколько раз из воды. Исследования на чистоту никаких примесей не обнаружили. Даже спектроскопически никаких следов натрия, рубидия, цезия и кальция найдено не было. Полученный таким образом $KClO_4$ подвергался двукратной перекристаллизации из чистой специально перегнанной с подбавкой щелочи и $KMnO_4$ воды в платиновых чашках. Выделившиеся мелкие кристаллы фильтровались через стеклянный Шоттовский фильтр, промывались на фильтре небольшими количествами холодной воды и высушивались при 130°. Очищенная таким образом соль служила нам для определения атомного веса калия. Несмотря на то, что в литературе имелись убедительные данные указывавшие на возможность при соблюдении известных условий без всяких потерь путем плавления превратить количественно перхлорат калия в хлористый калий[1] мы тем не менее не решились для определения атомного веса калия воспользоваться непосредственно определением отношения $KClO_4$ к $AgCl$ и сочли более правильным превратить сначала $KClO_4$ в KCl, последний еще раз перекристаллизовать и воспользоваться им для определения атомного веса калия. С этой целью все имеющиеся в нашем распоряжении количество перхлората около 18 г было разделено на две части. Около половины всего количества перхлората было помещено в две больших фарфоровых лодочки для сожжения в трубке из иенского стекла и нагревалось в электрической печи в токе сухого чистого хлористого водорода.[2] В начале температура держалась около 350° пока реакция, которая протекает довольно бурно, не закончилась. Когда вспенивание соли и выделение из нее газа прекратилось, для чего требуется около 2 час. нагревания, температура постепенно повышалась до 600° и обработка газообразным HCl продолжалась при этой темпе-

[1] A. Lamb and J. Marden, Journ. Amer. Chem. Soc., 34, 812 (1912).
[2] O. Honigschmidt u. Sachtleben, Ztschr. f. anorg. u. allgem. Chem., 178, 1 (1929).

ратуре не менее часа. По охлаждении лодочки со спекшейся в них солью извлекались из трубки, соль растворялась в горячей воде, раствор выпаривался до суха в платиновом тигле, остаток высушивался, нагревался до плавления в течение $^1/_2$ часа. По охлаждении сплав растворялся в небольшом количестве горячей воды, раствор выпаривался в платиновой чашке до небольшого объема, охлаждался и выделившийся KCl отделялся от раствора декантацией.

Полученный таким образом хлористый калий высушивался при температуре 350—400° до постоянного веса и служил для определения атомного веса калия. Вторая порция $KClO_4$ превращалась в KCl непосредственным нагреванием до плавления в электрической печи в платиновом тигле в течение $2^1/_2$ часов. По охлаждении прозрачный плав обрабатывался как указано выше. Полученный KCl высушивался при 400° и тоже употреблялся для определения атомного веса калия. Для проверки было произведено определение атомного веса калия, исходя из чистого препарата хлористого калия от Kahlbaum'a mit Garantieschein, который высушивался с этой целью так же при 400° до постоянного веса. При испытании на чистоту кальбаумовской соли KCl спектроскопически в ней были найдены ничтожные следы натрия — других примесей не было обнаружено.

Самое определение атомного веса производилось путем установления отношения KCl к AgCl. С этой целью, высушенные до постоянного веса навески KCl в количестве около 0.5 г растворялись в 200 см³ 0.07 норм. чистой HNO_3. Раствор осаждался на холоду небольшим избытком 0.1 норм. раствора $AgNO_3$ при постоянном помешивании, после чего раствор вместе с осадкой нагревался на электрической бане в стакане накрытом часовым стеклем до t° близкой к t° кипения, пока осадок не свернется и раствор над ним не сделается прозрачным. После этого раствору с осадком давали стоять в темноте в течение 24 час. и раствор отфильтровывался через стеклянный Шоттовский тигель-фильтр.

Осадок промывался несколько раз декантацией небольшим количеством азотной кислоты крепостью 0.04 нормальной, переводился на фильтр и еще 4—5 раз промывался небольшими количествами такой же азотной кислоты. Общее количество промывных вод не должно было превосходить 200 см³. Тигель с осадком сушился в сушильном шкафу при 140° до постоянного веса и взвешивался. Для взвешивания употреблялись весы системы Бунге, разновес был предварительно выверен. Чувствительность весов равнялась 0.0001 г. Учитывая условия работы наше определение атомного веса не может претендовать на очень большую точность. Возможная ошибка может

быть ± 3 во втором знаке, поэтому мы сочли излишним вводить при взвешивании поправку на пустоту. При расчетах атомного веса калия нами принимался атомный вес Ag = 107.88, а атомный вес Cl = 35.457, а самое вычисление производилось по формуле.

$$\text{Атомн. вес калия} = \frac{\text{Взят. навес. KCl} \times \text{мол. вес AgCl}}{\text{Получ. навеска AgCl}} - \text{атомн. вес Cl.}$$

Полученные результаты

Калий из гороха			Нормальный калий		
Навеска KCl	Получено AgCl	Атомн. вес K	Навеска KCl	Получено AgCl	Атомн. вес K
0.5211	1.0017	39.11	1.0781	2.0724	39.11
0.4632	0.8907	39.08	0.6531	1.2566	39.04
0.2949	0.5676	39.01	0.6331	1.2178	39.06
0.4894	0.9410	39.09			
0.4871	0.9364	39.10			
		Среднее 39.08 ± 0.018			Среднее 39.07 ± 0.022

Если отбросить при вычислении среднего значения атомного веса результат полученный в третьем опыте, как заведомо слишком низкий, то среднее значение атомного веса калия из 4-х определений будет равняться 39.09 ± 0.011.

1) Кроме определения атомного веса было испытано действие KCl на фотографические пластинки на чувствительную фотографическую бумагу. Опыт был поставлен таким же образом, как указано в работе M. Kuban,[1] т. е. соль насыпалась как непосредственно на пластинку покрытую картонной бумагой, в которой были вырезаны четырехугольные отверстия, так и через тонкую бумагу. Экспозиция 90 дней. Полученные от KCl из гороха отпечатки как-будто темнее, чем обычного KCl. Разница однако не велика. Пластинки употреблялись заграничные Extra Rapid.

2) Действие на бумагу через 90 дней экспозиции; опыт поставлен так же как и с пластинками при помещении соли непосредственно на светочувствительную сторону бумаги получились резкие отпечатки, причем калий выделенный из гороха дал отпечаток значительно темнее и резче, чем калий обыкновенный. При действии соли KCl на светочувствительный слой через тонкую бумагу разница в отпечатках получилась, но меное резкая. При сравнении отпечатков KCl при непосредственном действии на бумагу и через тонкую бумагу бросается в глаза очень резкое ослабление яркости

[1] M. Kuban. Über Kalium and Rubidiumstrahlung. Mitt. Inst. Radiumforsch., № 219 (1928).

отпечатка гораздо более резкое, чем должно было бы быть, если бы на бумагу действовали только лучи калия. Это обстоятельство заставляет предполагать, что главный фотографический эффект обусловлен ничтожной примесью какого то α-излучателя. Последнее обстоятельство весьма вероятно так как очистка KCl производилась в лаборатории Радиевого института, где заражение ничтожными следами α-излучателей, например, полонием вполне могло иметь место. Что количество α-излучателя ничтожно, видно из того, что при действии на бумагу и пластинку в течение 7—10 дней ни калий из гороха ни калий обыкновенный отпечатков не давали.

Возможно что действие на фотографическую бумагу обусловлено примесью к KCl триметиламина, который нам удалось обнаружить и который нацело удаляется только при высокой температуре. Это предположение нами в настоящее время проверяется.

Выводы

Полученные нами результаты показывают, что калий выделенный из гороха, в пределах ошибки применявшегося для определения атомного веса калия метода, имеет нормальный атомный вес. Таким образом в пределах точности наших определений никакого накопления более тяжелого, обладающего радиоактивными свойствами изотопа калия в семенах гороха не происходит. Делая сводку всех, полученных пока различными исследователями, результатов определения атомных весов калия, выделенного из различных растительных организмов мы можем представить их в виде следующей таблицы:

Авторы	Объект исследования	Атомный вес калия	Пределы колебания
F. H. Loring a. J. G. Druce.	Картофель (стебли)	40.5	40.40 — 40.59
H. H. Lowry	Семенные волоски хлопка	39.111	± 0.013
»	Пшеничная мука	39.091	± 0.016
J. G. F. Druce	Стебли картофеля	40 52	40.8—40.06
»	Мертвое дерево	39.11	
»	Семена лупина	40.67	
»	Металлич. калия	39.04	
Heller u. Wagner	KCl из $KClO_4$ Kahlbaum	39.08	39.07 — 39.09
»	Листья сахарн. свеклы	39.08	39.08 — 39.11
»	Schlempekohle	39.15	39.14 — 39.17
В. Г. Хлопин и М. А. Пасвик	Семена гороха	39.11 39.08 39.09 39.10	39.09 ± 0.018
	Нормальн. KCl Kahlbaum	39.11 39.04 39.06	39.07 ± 0.02

Из приводимой таблицы видно, что все исследователи, за исключением Loring'a и Druce'a, не нашли в атомном весе калия, выделенного ими из различных растений никаких резких отклонений от нормы. Лишь в опытах Loring'a и Druce'a наблюдалось как-будто резкое накопление тяжелого изотопа калия в стеблях картофеля и семенах лупина. Однако именно определение атомного веса калия у Loring'a и Druce'a отличались наименьшей точностью так как расхождения в отдельных определениях для одной и той же средней пробы достигали недопустимой даже для приближенного определения атомного веса величины: семь единиц в первом знаке. Таким образом на основании имеющегося в настоящее время в нашем распоряжении материала можно с уверенностью утверждать что сколько-нибудь значительного накопления радиоактивного изотопа калия в растительных организмах не происходит.

Тем не менее полученными результатами вопрос о разделении изотопов живыми организмами не может считаться окончательно решенным по следующим соображениям:

1) Все без исключения исследователи занимавшиеся до сих пор определением атомного веса калия определяли его не с такой степенью точности, чтобы подметить очень малое изменение в относительных количествах обоих изотопов, поэтому обогащение такого порядка какого удалось достигнуть Hevesy[1] т. е. изменения атомного веса на 0.005 при точности определения $\pm$ 1 в 3 знаке могло иметь место.

2) Калий, как мы видели является не совсем подходящим объектом для окончательного решения вопроса о возможности разделения изотопов живыми организмами, так как он не дает стойких органических комплексов, а потому участие его в замкнутых жизненных циклах, исключающих постоянный обмен с внешней средой представляется менее вероятным, чем для железа из гемоглобина крови или магния выделенного из хлорофилла, на которых и следовало бы проверить правильность вышеуказанной гипотезы. В отношении калия не исключается возможность временного накопления радиоактивного изотопа в растениях в определенные периоды их жизни. С этой точки зрения представляет интерес проверка такой возможности предпринятая сейчас Heller'ом и Wagner'ом.[2]

3) В пользу допущения возможности разделения изотопов в результате жизнедеятельности организмов говорит опубликованная осенью 1930 г.

[1] Hevesy, Nature, December, **10** (1927), 838.
[2] Heller und Wagner, Ztschr. anorg. allgem. Chem. **200**, 105 (1931).

работа P. Baxter'a и A. D. Bliss'a,[1] которые нашли что атомный вес уранового свинца, выделенного из единственной нам пока известной урановой руды органического происхождения — шведского кольма равен 206.013 в то время как атомный вес уранового свинца из чистого уранинита равен 206.046. Найденный Baxter'ом атомный вес свинца 206.013 при отсутствии у свинца изотопов с атомным весом меньшим чем 206 приводит нас к заключению, что урановый свинец из кольма на 99% состоит из изотопа с атомным весом 206, в то время как в нормальном урановом свинце должна быть примесь актиниевого свинца, имеющего по Астону[2] атомный вес 207 в количестве от 3—4%. Для того чтобы объяснить ненормально низкий атомный вес свинца из кольма, Baxter высказывает предположение, что в данном случае произошло при образовании этой руды в результате органического процесса разделение изотопов урана и в кольме мы имеем один урановый ряд, а актино-уран со всеми продуктами распада до актиниевого свинца включительно отсутствует. Эту гипотезу Baxter в настоящее время проверяет путем определения атомного веса урана выделенного из того же кольма. Результат этого определения до сих пор не опубликован. Нельзя не пожалеть, что Baxter избрал столь длинный и сложный путь для проверки высказанного им предположения, было бы гораздо проще и скорее произвести определения актиния в интересующем Baxter'a образце кольма, хотя бы по способу эманации, и тогда мы уже теперь имели бы ответ на интересующий нас вопрос. Во всяком случае необходимо подчеркнуть, что возможно и другое быть может столь же вероятное объяснение необычно низкого атомного веса свинца из кольма, а именно, что актиниевый свинец имеет тот же атомный вес, что и урановый т. е. 206, а сам актиниевый ряд происходит от одного из двух уже известных изотопов урана: урана I или урана II, вероятно от последнего, как это раньше предполагалось, во всех же до сих пор исследовавшихся образцах уранового свинца, дававших более высокий атомный вес нежели 206.01 находилась подмесь обыкновенного свинца, с атомным весом 207 не радиоактивного происхождения. Это последнее объяснение не исключается и последними определениями атомного веса урана, произведенными Астоном,[3] который масспектрографом с точностью до 2—3% не мог обнаружить в уране никаких изотопов с иным атомным весом чем 238.0.

Гос. Радиевый институт
Химический институт

[1] Baxter and A. D. Bliss., Journ. Amer. Ghem. Soc., 25, 4848 (4930).
[2] Aston, Nature, 123, Nr. 3096, 313 (1929).
[3] Aston, Nature, 128. Nr. 3234. 1931, 725.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ ГИБЕЛИ ОЗИМЫХ ХЛЕБОВ ОТ „ВЫПРЕВАНИЯ“ ИЛИ „ЗАДУШЕНИЯ“ ПОД ЛЕДЯНОЙ КОРКОЙ

А. А. РИХТЕРА и А. И. ГРЕЧУШНИКОВА

(Из работ Лаборатории физиологии растений Института засухи)

(*Представлено академиком* В. Л. Комаровым)

Одним из существенных факторов, играющих решающую роль в процессе зимовки наших культурных растений, является образование на поверхности почвы так называемой «ледяной корки» или «наледи». Развиваясь в большей или меньшей степени в зависимости от комбинаций метеорологических факторов и условий рельефа, ледяная корка достигает нередко весьма мощного развития, указания на толщину слоя льда в 6, 17 и даже 25 см не принадлежат к числу редких (А. А. Корнилов. Гибель озимых хлебов в 1927—1928. Тр. по прикл. бот., ген. сел., 1929, прил. 34).

Вместе с тем длительность существования ледяной корки измеряется нередко многими месяцами—в цитированной только что сводке Корнилова отмечается для зимы 1927—1928 г., что в Ейском районе «с 9 I образовалась ледяная корка, державшаяся затем . . . всю зиму», на Абжамской, Мариупольской, Донской и Сальской зоотехнических станциях «мощная ледяная кора продержалась почти . . . всю зиму—до февральской оттепели» (Корнилов, l. c., стр. 66 и сл.).

Эта мощность сплошного ледяного покрова и длительность его лежания не может не отзываться на состоянии растений, находящихся «в замурованном во льду состоянии» (Корнилов, l. c., стр. 76), понятно, что «большинство станций указывает на ледяную корку, как на один из основных факторов гибели, а иногда, как на главный фактор» (Корнилов, l. c., стр. 77); «растения закованные в ледяную корку, задыхались от недостатка воздуха» (Корнилов, l. c., стр. 76).

Такие отзывы и заключения являются обычными и умножение их не представляло бы затруднений.

Подводимая под эти массовые явления гибели озимых хлебов физиологическая база сводится обычно к тому, что «развитие озимых хлебов продолжается осенью и даже зимой под снежным покровом или возобновляется весной под ледяной коркой. Так как запас воздуха . . . оказывается ограниченным, . . . растения задыхаются» (Н. А. Максимов. Растение и низкие температуры, стр. 10—11).

Наличие жизнедеятельности озимых под покровом снега или льда, при температурах даже значительно ниже нуля может считаться в настоящее время вполне доказанным (А. А. Рихтер, Журн. оп. агр. ЮВ, т. IV, в. 2, 1927). Очевидно, что при всяком повышении температуры темп физиологических процессов должен быстро возрастать и все резче и резче отражаться на создании специфических анаэробных условий существования, ход исчезания кислорода под слабо проницаемой для воздуха коркой льда зависит при этом не только от поглощения его высшими зелеными организмами, но, и в первую голову, от массовой жизнедеятельности разнообразнейших микроорганизмов почвы, из которых целый ряд является жадными поглотителями кислорода — аэробами, а некоторые развертывают к тому же, свою активную жизнь при сравнительно низких температурах (напр. *Fusarium nivale* снежная плесень).

Таким образом, рабочей гипотезой для подхода к изучению явлений выпревания или задушения растений под ледяной коркой естественно является представление о наступлении процессов анаэробного дыхания со связанными с ним химическими последствиями и выявлении той или иной стойкости культурного растения к этому, вновь нарастающему, химизму.

Настоящая работа, посвященная разбору влияния одного из факторов анаэробного процесса—этилового спирта, является одним из звеньев исследовательской цепи вопросов изучения стойкости культурных растений Юго-Востока, поставленной перед собой Лабораторией физиологии растений Института засухи в Саратове. Идея работы всех опытных установок, а также изложение принадлежит А. А. Рихтеру, а выполнение заданий — А. И. Гречушникову. За предоставление семенного материала необходимо принести живейшую благодарность Селекционной лаборатории Института, в лице заведующего проф. Г. К. Мейстера.

Температура почвы под ледяной коркой

Процесс «самозадушения», или, точнее, страдания от воздействия продуктов анаэробного дыхания должен быть, очевидно, теснейшим образом связан с темпами развертывания жизненных процессов, приводящих к нако-

плению новых, ядовитых, продуктов обмена. Темпы эти, в свою очередь, являются функцией температуры среды, круто поднимаясь с нарастанием последней. Наличие ледяной корки, как слоя создающего непроницаемую для воздуха прослойку, вносит, казалось бы, основное противоречие в логическое развертывание вопроса, обуславливая низкую, нулевую температуру среды.

Полевые наблюдения показывают, однако, что на самом деле температурные соотношения развертываются совершенно иначе: ледяная корка при падающей на нее инсоляции начинает функционировать, как стекло в парниковых рамах, пропуская световые лучи сквозь себя и задерживая тепловые излучения нагретой лучами солнца темно-окрашенной почвы. Благодаря этому в течение дня под ледяной коркой идут процессы таяния и размораживания верхних слоев почвы, и накопляется значительное количество талой воды.

Чтобы хоть несколько подойти к пониманию температурных соотношений, могущих осуществляться в условиях ледяной корки на местных почвах Саратова, было поставлено несколько серий опытных установок по искусственному воспроизведению «ледяной корки».

В жестяную ванну, размерами 70 × 40 см насыпалась почва (южный чернозем) слоем в 5 см высоты и заливалась водой так, чтобы над почвой стоял слой воды толщиною также в 5 см, в боковой стенке ванны имелось отверстие, в которое вводился термометр, ртутный шарик которого помещался в толще почвы, примерно на 15—20 см от стенки.

Снаряженная таким образом ванна была выставлена на мороз, и в течение ночи (минимум 15° Ц) промерзала насквозь. Утром ванна выставлена на свет и начаты наблюдения над температурою воздуха и почвы ванны, по показаниям введенного в нее термометра.

Температурные соотношения в почве под ледяной коркой. А

	Время	t° Ц воздуха	t° Ц почвы под коркой	Примечание
19 III	9 час.	—1.0	+0.3	Ванна на столике под крышей вегетационного домика, покрытой снегом
	11 час.	—3.1	+1.6	Ванна выдвинута из под крыши резкий ветер со снегом; солнце за облаками резкий рассеянный свет
	13 час.	—2.4	+2.6	Облачность слабее, но прямого солнечного света нет
	15 час. 30 м.	—2.5	+2.0	Тоже
	17 час.	—2.4	+0.8	Тоже

Приведенный опыт является достаточно характерным: понижение атмосферной температуры в утренние часы идет на ряду с повышением ее в почвенном слое, что может быть объяснено лишь нагреванием темно-окрашенного слоя проникающими сквозь слой льда лучами рассеянного света; при спадании световых условий быстро и резко падает температура почвы, приближаясь к нулю.

Приведем еще один пример, выпукло рисующий зависимость нагревания почвы под ледяной коркой от условий ее освещения.

Температурные соотношения в почве под ледяной коркой. Б

	Время	t° Ц воздуха	t° Ц почвы подо льдом	Примечание
21 III	14 час.	+1.2	+06	Сильный ветер, пасмурно, изредка проглядывает солнце
	15 час.	+2.0	—0.2	После записи t° в 14 час. ванна покрыта крышкой из картона
	17 час.	+2.0	—0.2	Тоже

Соотношения обратного типа, сравнительно с первым примером, наличие льда является здесь явственно умеряющим фактором, вступающим в новую силу при затенении опытной постановки. Остановимся на двух примерах из серии проведенных опытов. Данные их говорят о глубоком интересе, с которым было бы связано изучение температурных соотношений непосредственно в поле в разнообразных условиях формирования и жизни «ледяной корки»; не стремясь к выполнению этой, по существу, метеорологической задачи, мы считаем достаточным для нашей цели отметить наличие под ледяной коркой, даже в условиях отсутствия прямого солнечного света, температур, значительно превышающих температуру таяния льда и, несомненно, вполне допускающих активную динамику жизненных процессов. Почва под «ледяной коркой» находится в условиях парникового самонагревания при поглощении световой радиации. Совершенно правы практики-агрономы, говорящие об усилении вредного действия ледяной корки благодаря тому, что «29 XII, когда на всем Причерноморьи озими были укрыты ледяной корою, солнце светило в течение почти 5 часов» (Корнилов, l. c., p. 66). Тут уже температурные различия должны были достигнуть гораздо более высоких пределов и в поверхностном слое почвы создаваться условия, резко стимулирующие процессы обмена; в одном из наших опытов под слоем льда и воды в почве отмечено + 7.5° Ц между тем как в воздухе, при сильном ветре и ярком солнце, было лишь — 5.5° Ц.

Ход анаэробного дыхания в зависимости от сорта и стадии развития

«Ледяная корка» на посевах озимых культурных хлебов — равносильна созданию анаэробных условий существования, с повышенным, в случае инсоляции, темпом химических процессов.

Очевидно, тот организм выдержит наибольшее время или выйдет наименее поврежденным из этих новых тяжелых соотношений, который развивает наименьшую скорость накопления продуктов анаэробного дыхания или окажется наиболее стойким к их вредному воздействию.

Попробуем подойти экспериментальным путем к освещению первой задачи, именно к вопросу о специфической высоте анаэробного дыхания у различных представителей наших культурных озимых хлебов.

Лабораторная методика, примененная нами, была весьма несложна: анаэробные условия создавались помещением объектов в замкнутые сосуды, в которых атмосферный воздух или заменялся водородом, или же выкачивался в присутствии щелочного раствора пирогаллола. В первом случае через приемники шел постоянный ток водорода, уносивший с собой образующуюся CO_2, улавливаемую затем баритовой водой; таким путем шло определение углекислоты анаэробного дыхания, спирт же учитывался по окончании опыта путем отгона из дышавших объектов. Возможность потери спирта уносом его в токе водорода устранялась перехватыванием его в охлаждаемых льдом водяных промывалках. Во втором случае, при помещении объектов в вакуум-экссиккаторы определение углекислоты выпадало и внимание экспериментатора концентрировалось на определении этилового спирта. Последний определялся по методу Никлу (С. Костычев. О количественном определении спирта в присутствии уксусного альдегида. Изв. Акад. Наук, 1915).

ОПЫТ № 1 8 V 1929

Опытный материал — озимая рожь, Елисеевская и озимая пшеница № 329
Растения в стадии кущения. t —15° Ц
Навески — ржи 15 г живого веса 3.0195 сухого
» — пшеницы 15 г » » 3.2025 »
Сначала было определено кислородное дыхание:
за 4 ч. выделено рожью 23.76 мг CO_2
» » пшеницей 21.208 » »
Затем растения переведены в атмосферу водорода и выделили за 112 час. 10 мин.
рожь 86.196 мг CO_2
пшеница 119.944 »
Учет спирта вслед за окончанием учета углекислоты дал:
для ржи 31.71 мг
» пшеницы 44.73 »
Произведя пересчет данных опыта на 100 ч. и 10 г сухого вещества имеем

	кислор. дых. CO_2	анаэр. дых.	спирт
Рожь	19.67 г (100)	2.544 г (100)	0.9361 г (100)
Пшеница № 329	16.55 г (84'14)	3.339 г (131'25)	1.2454 г (134)

Пшеница № 329 в анаэробных условиях выделяет больше углекислоты и образует больше спирта, примерно на одну треть.

ОПЫТ № 2 3 V 1929

Вакуум-экссиккатор. Продолжительность опыта 120 ч. t—15° Ц. При пересчете полученного отгоном спирта на 100 ч. и 100 г сухого веса материала оказалось

для ржи	1.0541 г	(100)
» пшеницы	1.1375 г	(108)

И здесь пшеница №329 обогнала рожь в образовании спирта. Срок выдерживания в бескислородном пространстве был избыточен: часть листьев побурела, видимо начав отмирать.

ОПЫТ № 3 14 V 1929

Опытные объекты — те же озимые хлеба
Стадия развития — трубка до начала колошения
Материал — стебли с 3 верхними листьями
На 100 ч. и 100 г сухого вещества имеем:

	кислор. дых. CO_2	анаэр. дых. CO_2	спирт
Рожь	43.55 г (100)	1.244 г (100)	0.2182 г (100)
Пшеница № 329	42.59 г (97.65)	1.413 г (113.6)	0.3532 г (161.8)

Результаты еще более выпуклые, чем в предыдущих: спирту накопляется в анаэробно дышащих растениях пшеницы почти на $^2/_3$ больше, чем у ржи.

Приведенные результаты с несомненностью говорят о специфическом для каждого из опытных организмов ходе диссимиляционного процесса: озимая пшеница № 329, несколько уступая ржи в энергии кислородного дыхания, измеряемого по количеству выделяемой углекислоты, значительно превышает ее темпами бескислородного процесса, приводящими к накоплению в тканях ядовитого продукта — этилового алкоголя.

Посмотрим, как будет вести себя другая озимая пшеница, именно та, которая в тяжелые по условиям зимы выпадает почти целиком страдая как от вымерзания, так и от выпревания — кооператорка.

ОПЫТ № 4 30 V 1929

Опытные растения — озимая пшеница № 329 и озимая же кооператорка. Стадия развития — выход в трубку до начала колошения. Материал — стебли с 3 верхними листьями.
При пересчете полученных опытных цифр на 100 ч. к 100 г сухого вещества имеем —

	кислор. дых. CO_2	анаэр. дых. CO_2	спирт
Пшеница № 329	14.15 г (100)	2.185 г (100)	0.7514 (100)
» кооперат.	16.86 г (119.15)	2.497 г (114.28)	1.2169 (161.9)

Опыт говорит нам, что кооператорка значительно обгоняет пшеницу № 329 в анаэробном темпе дыхания, накопляя в своих тканях примерно на 60% больше спирта. Таким образом, мы получаем ряд по активности спиртообразования в процессе анаэробного дыхания: рожь < пшеница № 329 < пшеница кооператорка.

Приведем еще один опыт сравнительного определения продуктов анаэробного дыхания в органах взрослого растения культурного злака.

ОПЫТ № 5 11 VI 1929

Опытное растение: озимая рожь и озимая пшеница № 329. Стадия развития — колошение Материал — взрослые листья.

При пересчете полученных методом вакуум-экссиккатора данных на 100 ч. и 100 г. сухого веса получаем:

	Накоплено спирта
Озимая рожь	0.1956 г (100)
Пшеница № 329	0.2344 г (119.9)

И здесь имеем преобладание в образовании спирта за листьями пшеницы № 329 перед озимой рожью.

Предшествовавшим опытам следует придавать лишь ориентировочное значение, действительно, материалом для них служили растения в стадии, далеко вышедшей из состояния зимовки, причем подопытными органами являлись части, не играющие решающей, наиболее ответственной роли при зимовке. Между тем из ряда работ известно, что различные органы обладают весьма разнообразными способностями к анаэробному процессу дыхания, в частности к образованию в бескислородной атмосфере спирта; в своей монографии акад. С. П. Костычев (S. Kostytschew. Pflanzenatmung, 1924, p. 60) приводит таблицу, в которой соотношения углекислоты к спирту от 100.95 (сливы) падают до 100.0 (картофельные клубни).

С другой стороны, очевидно, что с производственной точки зрения важны те органы зимующих растений, которые своей стойкостью и способностью регенерировать определяют выживаемость озимого злака за время зимовки. Такими, по данным А. А. Рихтера,[1] надо считать узлы кущения так как в них наиболее ярко развертывается картина зимней динамики углеводов; по возрениям М. И. Салтыковского (М. И. Салтыковский. По вопросу о зимостойкости озимых злаков. Журн. оп. агр. ЮВ, т. VII, вып. II, 1929), узлы кущения сосредотачивают в себе основные возможности озимого злака для регенерации путем отрастания.

[1] А. А. Рихтер. Исследования над холодостойкостью растений, I. Журн. оп. агр. Ю. В., т.IV, вып. 2, 1927.

Что же касается листовых и корневых частей, то частичное или даже полное их повреждение при зимовке не является еще решающим для судеб целого растения.

Следующая серия опытов была поставлена, поэтому, с узлами кущения, взятыми со специальных посевов.

ОПЫТ № 6 25 VII 1929

Опытные растения: озимая рожь и кооператорка. Стадия развития — кущение. Опытный материал. t 18°

При пересчете полученных опытных цифр на 100 ч. и 100 г сухого веса получаем:

	CO_2 кислор. дых.	CO_2 анаэр. дых.	Спирт
Озимая рожь	29.907 г (100)	3.314 г (100)	3.0956 г (100)
Кооператорка	33.805 г (113)	3.521 г (106)	4.4030 г (142.2)

ОПЫТ № 7 12 XI 1929

Опытные растения и материал, как в предыдущем опыте. t 17°

При пересчете полученных опытных цифр на 100 ч и 10 г сухого веса, получаем:

	CO_2 кислор. дых.	CO_2 анаэр. дых.	Спирт
Озимая рожь	14.17 г (100)	5.62 г (100)	5.12 г (100)
Кооператорка	18.18 г (128.3)	6.74 г (120)	6.19 г (120.9)

ОПЫТ № 8 25 XI 1929

Опытные растения и материал, как в опыте № 6. t 19—20°

При пересчете на 100 ч. и 100 г сухого веса имеем:

	CO_2 анаэробн. дых.	Спирт
Озимая рожь	6.35 г (100)	6.50 г (100)
Кооператорка	9.09 г (143)	8.94 г (137.5)

ОПЫТ № 9 26 X 1929

Опытные растения и материал как выше

При пересчете полученных методом вакуум-экссиккатора данных на 100 ч и 100 г сухого веса имеем:

	Спирт
Озимая рожь	4.6395 г (100)
Кооператорка	7.3417 г (158.2)

Примененная в данном опыте, как, впрочем, и во всех остальных, качественная реакция на альдегиды фуксино-сернистой кислотой, в предыдущих случаях отрицательная, дала положительные ответы: слабый в случае ржи и очень интенсивный для кооператорки.

Если расположить результаты опытов № 6—8, проведенных одним и тем же методом, в последовательном по срокам порядке, получим чрезвычайно характерную картину падения энергии кислородного дыхания, с одновременным наростанием энергии анаэробного дыхания, как в области выделения углекислоты, так и со стороны накопления спирта:

Сроки	Аэробная	CO_2	Анаэробная	CO_2	Спирт	
	Рожь	№ 329	Рожь	№ 329	Рожь	№ 329
25 VII	29.907	33.805	3.314	3.521	3.096	4.403
12 XI	14.170	18.180	5.620	6.740	5.120	6.190
25 XI	—	—	6.350	9.090	6.500	8.940

С наступлением периода зимнего покоя энергетические процессы как бы переключаются на анаэробиоз: если 25 VII отношение у ржи было равно 0.11, а у пшеницы № 329 0.10, то в первой половине ноября эти отношения стали равняться уже 0.40 и, соответственно, 0.37, т. е. анаэробные способности возросли примерно в четыре раза.

Что же касается накопления спирта, то его в конце ноября оказывается уже вдвое больше, при расчете на сухое вещество, чем в июле, причем пшеница № 329, обгонявшая рожь в образовании спирта в летний период на 1.31%, в начале зимы стоит выше ее уже на 2.44%.

Выявляющаяся закономерность специфических особенностей различных озимых злаков в отношении динамики анаэробного дыхания отвечает, как видно из протоколов опытов, обычным лабораторным температурам. Повторение опытов ири более низких температурах, именно при температуре тающего льда привело к значительно пониженным абсолютным цифрам, как и следовало ожидать, но относительные величины сохранили свое общее направление. Приведем несколько таких примеров.

ОПЫТ № 10 26 VI 1929

Опытные растения рожь и озимая пшеница № 329. Стадия — растения с 4 листочками. Материал — растения целиком. t 0°

При пересчете на 100 г вакуум-экссиккаторного опытного материала и 100 ч. имеем:

	Спирт
Рожь	0.1669 г (100)
Пшеница № 329	0.1856 г (111.2)

ОПЫТ № 11 8 VII 1929

Опытные растения — озимая пшеница № 329 и кооператорка. Стадия проростков в стадии кущения. Материал — узлы кущения. t 0°

При пересчете на 100 ч. и 100 г сухого веса, имеем:

	Аэробная CO_2	Анаэробная CO_2	Спирт
Оз. пшеница № 329 . .	7.483 г (100)	2.97 г (100)	1.0330 г (100)
Кооператорка	6.158 г (82.3)	2.81 г (94.3)	1.0678 г (103.4)

ОПЫТ № 12 8 VII 1929

Как выше, в вакуум-экссиккаторе

При пересчете на 100 г сухого вещества и 100 ч. имеем:

	Спирт
Озимая пшеница № 329	0.4312 г (100)
Кооператорка	0.5880 г (136.3)

Приведем еще несколько примеров специфического различия в анаэробном накоплении спирта у пшениц разной стойкости.

ОПЫТ № 13 6 I 1930

Опытные растения — озимая пшеница № 329, более стойкая и украинка, менее стойкая. Материал взят непосредственно с поля, оттаян, отмыт от почвы и обсушен фильтровальной бумагой. Для опыта взяты узлы кущения. Температура опыта сначала 0°, а затем 16°.

При пересчете на 100 г сухого вещества и 100 ч. получаем:

	Аэробная CO_2	Анаэробная CO_2	Спирт
1) при 0°:			
Озимая № 329	15.33 г (100)	2.58 г (100)	2.22 г (100)
Украинка	23.74 г (154)	3.21 г (123)	4.34 г (195.4)
2) при 16°:			
Озимая № 329	—	4.482 г (100)	5.513 г (100)
Украинка	—	4.987 г (111)	6.339 г (115)

ОПЫТ № 14 14 X 1929

Опытные растения — озимая пшеница № 329 и озимая № 52 (Красно-Кутской оп. станции, особенно стойкая). Опытный материал — узлы кущения. t 15—16°

При пересчете на 100 ч. и 100 г сухого вещества имеем:

	CO_2 Аэробная	CO_2 Анаэробная	Спирт
Пшеница № 329	40.894 г (100)	8.23 г (100)	7.6072 г (100)
» № 52	43.628 г (107)	7.96 г (97)	7.2693 г (96)

При проведении опыта с теми же растениями в вакуум-эксиккаторе, но в стадии проростков без сформированных узлов кущения, результаты получились иные в абсолютной высоте процесса, но вполне схожие по направлению его. t 16°.

	Спирт
Пшеница № 329	1.7585 г (100)
» № 52	1.5757 г (89.6)

Как видим, общая закономерность относительной сниженности анаэробного дыхания и образования спирта характерна для озимых злаков с повышенной стойкостью зимовки.

Данные предыдущих опытов, приводящие к заключению о большом накоплении спирта в течение анаэробиоза в тканях менее стойких пшениц базируется на определениях, суммирующих обмен в течение одного, сравнительно длительного, периода времени, именно 5 сут. (120 ч.), или около этого.

Нет сомнения, однако, что ход процесса в отдельные отрезки этого периода далеко не одинаков. Законно предположение, что динамика спиртообразования во времени может быть характерна для различных своей сопротивляемостью злаков.

Для освещения этого вопроса был поставлен опыт с двумя пшеницами — стойкой № 329 и нестойкой — кооператоркой.

В приемники герметически запираемые, были внесены равные по живому весу количества опытного материала, именно узлов кущения, добы-

тых непосредственно из-под снега с поля в конце декабря месяца 1929 г. Приемники были эвакуированы, а затем наполнены водородом. t 17°.

Через определенные промежутки снималось по одному приемнику для анализа: определялось количество выделенной углекислоты и, при помощи отгона, количество образовавшегося спирта.

Результаты серий определений, перечисленные для возможности сравнения, на 100 г сухого веса и 100 ч. приведены в следующей таблице.

Динамика анаэробного обмена узлов кущения пшеницы № 329 и кооператорки

Последов. сроки	Пшеница № 329		Кооператорка	
Часы	CO_2	Спирт	CO_2	Спирт
44	8.069	6.528	11.93	10.07
24	3.585	3.060	11.81	8.668
24	2.653	2.682	10.94	10.96
24	1.8886	1.7401	16.07	11.96
44	1.5810	0.9763	—	—

Данные опыта весьма характерны: стойкая пшеница № 329 уже на третьи сутки резко снижает свой обмен, оставаясь далее на низких «анабиотических» горизонтах, между тем, как нестойкая «кооператорка» продолжает свой обмен в том же повышенном против № 329 темпе, который намечается с первых же суток анаэробиоза.

Очевидно в этих двух пшеницах мы имеем два расходящихся биологических примера разнообразной комбинации энзиматических факторов приводящих к той или иной динамике обмена, коррелятивно они же кладут отпечаток на относительную стойкость всего организма, при наступлении новых условий существования.

В условиях естественной обстановки, создающейся под покровом «ледяной корки», растения оказывается не только в среде, обедненной кислородом, или совершенно его лишенной, но и в специфических условиях затапливания водою, образующейся благодаря оттаиванию верхних слоев почвы и нижних слоев ледяного слоя в «парниковой» температуре, создающейся при концентрации световых лучей под коркой.

Хотя и нельзя было ожидать существенных расхождений с уже полученными результатами, было решено для полноты освещения естественных соотношений провести несколько определений и в условиях водного анаэробиоза.

Постановка, как выше, но вместо газообразной бескислородной среды объекты помещались в свеже прокипяченную воду.

Материал — узлы кущения и листья. В виду того, что в условиях водной среды значительно повышаются возможности нечистоты опыта, бла

годаря вмешательству посторонних опытному материалу низших организмов, время опыта было сокращено до 24 ч. и ниже и выбраны сравнительно низкие температуры. Углекислота не определялась, количества спирта средние из двух параллельных.

Приведем общую таблицу для пяти установок.

Накопление спирта в узлах кущения и листьях культурных злаков

Названия растений	t°	Количество спирта в граммах на 100 г сух. вещества и 100 ч.	Относительные величины.	Примечание.
Рожь Елисеевская, узлы	15—16	18.72	100	Продолжительность опыта 24 ч.
Пшеница № 329 »	15—16	19.57	104	
» № 52 »	15—16	19.82	106	
» украинка »	15—16	23.60	126	
» кооператорка, узлы	15—16	25.24	135	
Пшеница № 329, узлы	7	10.36	100	Продолжительность опыта 13 ч.
» украинка »	7	11.26	109	
» № 52 »	7	12.60	122	
» кооператорка, узлы	7	13.28	128	
Рожь Елисеевская, узлы	0.0	7.26	100	Продолжительность опыта 12 ч.
Пшеница № 52 »	0.0	9.95	137	
» кооператорка, узлы	0.0	12.97	179	
Пшеница № 329, листья	7	4.78	100	Продолжительность опыта 15 ч.
» украинка, »	7	5.61	117	
» № 52, »	7	5.64	118	
» кооператорка, листья	7	6.72	141	
Пшеница № 52, листья	0.0	3.95	100	Продолжительность опыта 15 ч.
» кооператорка, листья	0.0	4.16	105	

Развертывающаяся из комбинации опытных цифр картина повторяет уже известные нам соотношения, так как различные озимые злаки резко расходятся друг от друга способностями своими к спиртообразованию в первые же часы своего анаэробного существования. Оказывается возможным расположить их в определенный ряд, в начале которого станут стойкие формы — озимая рожь и стойкая озимая пшеница № 329, а противоположный конец займут нестойкие формы, вроде «украинки» и, в особенности, «кооператорки».

Исходя из приведенных результатов исследований, можно считать установленным факт накопления в органах озимых злаков продуктов анаэробного обмена, именно этилового спирта; при этом количественные соотношения этого накопления далеко не одинаковы у различных представителей наших культурных озимых хлебов, изменяясь в сторону повышения у организмов, наименее стойких к зиме и падая у отчетливо зимостойких форм.

Так как длительное анаэробное существование заканчивается, рано или поздно в связи с температурными условиями, смертельным исходом, внешне характеризующимся потерей тургора, побурением хлорофилоносных частей и пр., естественно искать причин этой смерти в тех химических перегруппировках, которые связаны с длительным анаэробиозом и, прежде всего, в появлении ядовито действующих продуктов обмена, именно этилового спирта, как накопляющегося в значительных количествах.

Необходимо отметить, что наряду со спиртом в нескольких случаях оказалось возможным обнаружить и альдегиды, но появление их было ограничено такими небольшими концентрациями и было настолько случайно, что приписывать им решающее значение в обосновании жизненности организма было бы неосторожно.

Напрашивается заключение, что в течение продолжающегося анаэробного обмена в условиях «ледяной корки» наши культурные озимые хлеба подпадают процессу самоотравления в результате вынужденного «алкоголизма». Вопрос об исходе этого самоотравления должен решаться, с одной стороны, количеством накопляющегося льда, а с другой, и специфической чувствительностью данного организма к этому яду.

Первую сторону вопроса нам удалось уже разобрать, показав, что нестойкость озимых совпадает с высокими показателями выхода этилового спирта, и наоборот их стойкость соответствует показателям низким. Остается подойти к экспериментальной проработке вопроса о стойкости наших подопытных растений в отношении вырабатываемого ими самими яда.

Подход к установлению специфической чувствительности озимых злаков к воздействию на них этилового спирта был намечен троякий: методом определения степени угнетенности кислородного дыхания (по выделяемой CO_2), учетом отмирания эпидермальных клеток и, в-третьих, установлением задержки ростовых явлений под воздействием нарастающих концентраций яда.

Все эти три метода дали различные по яркости и выпуклости, но однородные по характеру результаты, вполне подтверждающие нашу основную рабочую гипотезу.

Пробежим в нескольких словах указанные постановки.

1. Угнетение дыхания этиловым спиртом.

Одинаковые навески узлов кущения различных озимых злаков подвергались в широких кристаллизаторах воздействию растворов этилового спирта, крепостью 0, 10 и 20% в течение 2 ч.; затем вынутые из кристаллизаторов и обсушенные фильтровальной бумагой узлы кущения переносились в прибор для определения выделяющейся углекислоты.

Полученные данные, перечисленные на 100 ч. и 10 г сухого вещества, укладываются в следующие две таблицы, соответственно двум опытным постановкам.

Объекты	Количество CO_2 на 100 ч. и 100 г сух. вещ.		
	Вода	Спирт 10%	Спирт 20%
Рожь Елисеевская	36.58 (100)	29.31 (80)	16.64 (45)
Кооператорка	35.30 (100)	23.53 (67)	11.99 (34)
Пшеница № 329	50.60 (100)	41.94 (83)	20.55 (41)
» украинка	50.48 (100)	40.95 (81)	17.91 (35)
» кооператорка	46.87 (100)	37.42 (80)	18.91 (40)

Наметилось резкое расхождение динамики угнетения у ржи и пшеницы кооператорки, однако, сколько-нибудь явных расхождений в поведении различных пшениц отметить нельзя, что связано, по всей вероятности, с черезчур грубыми дозировками спирта и недостаточностью срока воздействия.

2. Отмирание эпидемических клеток.

Учет отношения эпидермальных клеток к различным возбудителям, в качестве показателя для целого органа является широко принятым методом работы (определение осмотических концентраций, показателей холодостойкости и т. п.).

Применение его в нашем случае сводилось к выдерживанию поверхностных срезов эпидермиса в растворах спирта различной концентрации в течение разных промежутков; обработанные таким образом срезы пере-

посились на несколько минут в слабый (0.05%) водный раствор краски нейтральрот для прижизненного окрашивания и резко выделявшиеся после этого живые клетки подсчитывались под микроскопом. Работа проведена сотрудником лаборатории Н. Н. Сахаровой.

Приведем таблицу подсчетов, приведенных на срезах с листьев ржи Елисеевской и пшеницы-кооператорки.

Стойкость эпидермиса листьев к различным концентрациям спирта при 18—20° Ц

Название растений	Концентрация спирта в %	Время воздействия											
		30′			60′			90′			120′		
		Всего считано клеток	Отмерших	% отмерших	Всего считано клеток	Отмерших	% отмерших	Всего считано клеток	Отмерших	% отмерших	Всего считано клеток	Отмерших	% отмерших
Рожь Елисеевская	0.0	119	0	0	102	0	0	97	0	0	117	0	0
	10.0	90	0	0	95	0	0	93	0	0	81	7	8.7
	20.0	96	0	0	90	1	1.1	83	1	1.2	89	27	30.3
Пшеница кооператорка	0.0	114	0	0	90	0	0	92	0	0	90	0	0
	10.0	101	0	0	84	0	0	85	2	2.3	106	43	40.6
	20.0	107	3	2.7	88	6	6.8	77	25	32.4	84	78	9.26

Результаты достаточно ярки: в 10%-растворе этилового спирта отмирание эпидермальных клеток ржи начинается лишь через два часа и выражается в 8.7% к общему числу вошедших в учет клеток, у кооператорки же отмирание начинается в размере 2.3% уже через полтора часа, а через два часа оказывается массовым, достигая почти половины клеток (40.6%); 20%-й спирт действует, как и следовало ожидать, еще губительнее, и расхождение в стойкостях организмов еще характернее: рожь дает через 1 ч. воздействия 1% мертвых клеток и 30.3% через 2 ч., между тем как у кооператорки уже через полчаса воздействия раствора 27% клеток убиты, а через 2 ч. отравление распространяется почти на всю массу эпидермальных клеток (мертвы 92.9%).

Значительно меньшая стойкость клеточных элементов пшеницы сравнительно с рожью, ясна с достаточной выпуклостью.

3. Задержка роста корней.

Одной из новейших сводок работ и методики в области учета ядовитости растворов приемом измерения темпа роста корневых систем является статья Эйзенменгера (W. Eisenmenger. Toxicity of some aliphatic alcools. Plant Physiology, 1930, № 1). Рекомендуемый им метод лег в основу и нашей практики. Опыт шел следующим порядком. Зерновые опытных озимых злаков проращивались в чашках Коха на смоченной дестиллированной водой фильтровальной бумаге при 25°. Из двухдневных проростков, начавших образовывать достаточную корневую систему, отбирались порции по 25 штук и у них производился, возможно быстро, промер всех корешков; таким образом получалась сумма «первоначальной длины» корешков.

Проростки с промеренными корешками тотчас же переносились на растворы этилового спирта, где и оставлялись, укрепленные в отверстиях парафинированной марли, на четверо суток для дальнейшего роста. Чашки с проростками помещались в термостат при 25° и были предохранены от испарения стеклянными колпаками. По истечении четырех суток проростки снова подвергались промерке, давшей сумму «конечных длин» корешков. Приведем таблицу, сводящую результаты воздействия четырех различных концентраций этилового спирта на рост корневых систем нашей озимой ржи и трех подопытных пшениц, в сравнении с разрастанием корешков в дестиллированной воде.

В таблице приведены суммы «начальных» и «конечных» длин корешков в различных условиях и вычисленные, на основании этих опытных данных, проценты удлинения, являющиеся специфическими показателями скорости процесса.

Озимая рожь опять оказывается, по стойкости к отравляющему воздействию растворов спирта, на первом месте: рост корешков ее проростков развертывается, правда в очень слабой степени, еще в 4% растворе спирта в котором корни всех подопытных пшениц отказываются расти нацело. В 3%-м растворе этилового спирта некоторую энергию роста показывает пшеница № 329, стойкая, между тем как и украинка и кооператорка оказываются задержанными нацело. Однопроцентный спиртовый раствор дает следующую градацию показателей устойчивости, основанных на скорости удлинения корешков: рожь 380 (100), пшеница № 329—79 (21), украинка 32 (8.4) и кооператорка 34 (8.9)

Данные этих опытов являются весьма показательными и интересными не только по выпуклости цифровых результатов, но, в особенности, потому, что мы имеем здесь дело с областью сравнительно низких концентраций

ядовитого вещества — спирта, приближающихся по всей вероятности, к тем, которые определяют жизненность озимого злака во время критических периодов его зимовки.

Корневые системы озимых злаков	Спирт в %																	
	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения	Начальная длина мм	Конечная длина мм	% удлинения
Озимая рожь . . .	977	6001	**515**	965	4611	**378**	833	3997	**380**	801	2695	**236**	615	1237	**104**	1414	1438	**2**
Пшеница	1150	4389	**282**	1330	3232	**143**	1291	2307	**79**	1475	1960	**33**	1339	1426	**7**	—	—	—
Пшеница украинка	1573	3375	**110**	1825	3217	**76**	1851	2446	**32**	1815	1947	**7**	1848	1847	**0**	—	—	—
Пшеница кооператорка	1450	4099	**183**	1530	2302	**50**	1600	2151	**34**	1497	1685	**13**	1482	1472	**0**	—	—	—

Попробуем в нескольких словах резюмировать основные результаты работы.

1. Образование «ледяной корки» под озимыми посевами обуславливает наличие анаэробных условий обмена, усугубляемых «парниковым эффектом», т. е. значительным повышением температуры почвы под ледяным слоем за счет проходящих сквозь него световых лучей, даже при рассеянной радиации.

2. Различные озимые хлеба и различные их части обладают далеко не одинакой способностью и темпами анаэробного обмена, выражающимися в выделении анаэробной углекислоты и накоплении в тканях этилового спирта; наиболее повышенно процессы эти развертываются в основных по химически-значной для зимовки динамике и ценных по регенерационной способности частях — узлах кущения; в ряде различных озимых наиболее стойкие (рожь, пшеница № 329) показывают наименее высокие показатели анаэробного обмена и, следовательно, накопляют менее всего спирта, между тем, как наименее стойкие (кооператорка) дают ярко повышенный ход анаэробного обмена и особенно крупные накопления спирта в тканях.

3. Изучение стойкости различных озимых по отношению к растворам этилового спирта привело к заключению, что наибольшая стойкость к этому плазматическому яду совпадает с наибольшей зимостойкостью (рожь,

пшеница № 329), наименьшая же выявляется наименее же стойкими формами (кооператорка).

4. Весьма вероятным, поэтому, является предположение, что в процессе анаэробного обмена, наступающего под ледяной коркой, озимые злаки погибают путем спиртового самоотравления, наступающего тем скорее, чем менее стоек организм к яду и чем скорее, следовательно, расстраивается «регуляционный» механизм плазмы.

5. Практическая агрономия должна, наряду с выработкой технических мер борьбы с образованием «ледяной корки», иметь в виду физиологические различия озимых хлебов по отношению к анаэробному обмену, применяя в районах подверженных частому появлению «ледяной корки» такие сорта культурных растений, которые выделяются низким темпом анаэробного обмена и высокой стойкостью к этиловому спирту.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИСКОПАЕМЫЕ ЛЕСА КАК УКАЗАТЕЛИ ПОЛОЖЕНИЯ СТРАН СВЕТА В ГЕОЛОГИЧЕСКОМ ПРОШЛОМ И ТЕОРИЯ ВЕГЕНЕРА

А. Н. КРИШТОФОВИЧА

(*Представлено академиком* А. А. Борисяком)

В настоящее время геологи и палеонтологи резко распадаются на две группы, одна из которых целиком или хотя частично признает идеи Вегенера, а другая или отвергает их не менее решительно как собственными доводами, так и опираясь на авторитет других дисциплин, или относится к ним более или менее безразлично. Этими разногласиями не менее проникнута и семья палеоботаников и ботаников, и, в то время как многие из них разделяют взгляды Вегенера или хотя признают вековые смещения полюсов в смысле Кролля и Натгорста (к чему склоняюсь и я), ряд палеоботаников, играющих руководящую роль (как В. Готан, Г. Галле, Э. Берри) решительно возражают против этих допущений. Всякому геологу, зоологу и ботанику ясно, какое колоссальное значение имеет решительно для всех биологических и геологических построений и в частности для вопросов эволюции, миграции и возникновения биогеографических областей то или иное отношение к вопросу о постоянстве положения материков и земной оси — или короче — к вопросу о вегенеризме.

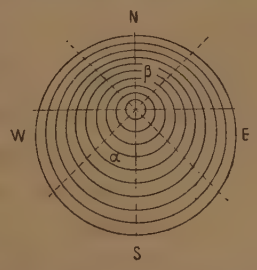
Принятие стационарности материков приводит нас к выводу, что каждая точка земной поверхности — или внутри толщи твердой земной коры, сохраняет и по сей день то положение, которое она имела в течение всего геологического прошлого, поскольку она не выведена из него тектоническими движениями. Наоборот, принятие вегенеровской концепции, принципа плавучести материков и перемещения земной оси, неизбежно приводит к выводу, что те же самые точки земной поверхности в различные эпохи геологического прошлого находились в различном положении по

отношению к странам света и даже перемещались из одного полушария в другое, как напр. индийская территория области гондванского оледенения.

Таким образом, если бы мы имели в руках способ установить для различных моментов геологического прошлого положение данной точки по отношению к странам света, мы имели бы вопрос в значительной степени разрешенным или во всяком случае было бы доказано изменение или постоянство географического положения участков суши в прошлом. В случае, если бы удалось указать, что эти отклонения от настоящего положения стран света, не стоят в связи с тектоническими перемещениями слоев земной коры, которые легко могут быть учтены, я бы считал доказанным непостоянство географического положения точек на земной поверхности, и оставалось бы решить лишь вопрос, имеем ли мы дело лишь со смещением полюсов или же здесь играла роль и плавучесть самих материков. Тогда для окончательного решения вопроса было бы достаточно рядом наблюдений взять полюс под перекрестный обстрел на основании данных различных эпох и таким образом решить вопрос окончательно.

Для определения географической ориентировки стран света в геологическом прошлом в данных точках земного шара, я предлагаю использовать так называемые «ископаемые леса». Понятие ископаемого леса в геологии не строго установлено и часто ими называют просто массовые скопления ископаемой окаменелой древесины, как напр. в Моккатаме близ Капра или в Аризоне в САСШ. Однако, настоящим ископаемым лесом надо считать лишь такие образования, где в определенном геологическом горизонте наблюдаются стоящие в своем естественном положении стволы или пни, с сохранившимися еще в почве корнями. О массе подобных стволов дают представление многие угольные копи Германии, разрабатываемые открытыми работами, напр. в Нижнем Лаузице в Саксонии. Проф. Кейльгак сообщает, что напр. на поверхности пласта «Клара 2» близ Вельцова, на площади всего в 1000 м было насчитано не менее 30 стоячих стволов от 1 до 3 м толщины. Вообще же стволы встречаются сотнями (*Taxodium distichum, Sequoia Langsdorfii*), причем по годичным кольцам возраст их определяется часто более 1000 лет. Стоячие стволы известны и у нас в ряде случаев, между прочим — на Годерском перевале в Закавказьи, в Чидерты на восточном склоне Урала, близь Челябинска и т. д. В шт. Уайоминг в серии туфовых отложений третичного периода представлено одним над другим до 15 горизонтов ископаемых стоячих пней. Известно, что в нынешних лесах сторона дерева обращенная к югу, развивается иначе, чем его же северная сторона (фиг. 1). Южная часть кроны

больше, пышнее развита; южная половина ствола имеет более широкие годовые кольца и больший радиус, чем сторона обращенная к северу, что сводится на влияние освещения и конечно различно проявляется в густых и редких лесах и на деревьях, растущих на открытых местах. Впрочем, явление эксцентрицитета является следствием различных факторов, среди которых играют роль свет и тепло, как функции экспозиции. Поэтому надежные результаты здесь могут быть получены лишь путем массовых измерений и сравнений диаметров и годичных колец стоячих стволов, причем наиболее ценными явятся местонахождения, где геологические напластования остались ненарушенными или были смещены лишь в слабой степени. Если бы нам удалось на стоячих ископаемых стволах определить их южную и северную сторону, то ясно, что тем самым мы бы определили и положение этой части суши по отношению к странам света. Сравнение результатов измерений стволов одной и той же эпохи в различных странах дало бы нам положение полюса, а если бы оказалось, что одновременные стрелки, направленные, положим, к южному полюсу, не сходятся, то это было бы очевидным доказательством изменения и взаимного положения некоторых участков этой части суши.



Фиг. 1. Схематический разрез ствола дерева в северном полушарии. Как эксцентрицитет, представлены все возможные отличия древесины южной и северной стороны ствола.

Первоначальную работу можно было бы вести, после приобретения достаточной опытности на участках современных сведенных лесов, на самых территориях ископаемых лесов, если бы выяснение очертаний их ствола и длины его радиусов по различным направлениям оказалось бы возможным производить на месте, и если бы только эта методика была уже достаточной для нашей цели. Для более же точных подсчетов и измерений срезы стволов с точными отметками об их ориентировке по отношению к странам света должны быть перенесены в лабораторию, где дальнейшие измерения должны итти уже на отшлифованных поверхностях. Особенно интересны были бы такие исследования в различных геологических горизонтах одного и того же района.

На земном шаре нет недостатка в ископаемых лесах, т. е. в пнях в естественном положении, но желательные результаты можно будет получить лишь на настоящих окаменелых или обугленных (лигнитизированных) стволах. Легче всего будет произвести необходимые работы на третичных

ископаемых лесах Зап. Европы (Саксония, Силезия, Чехия и др.) и Сев. Америки, где ведутся открытые выработки. Для третичного же периода Сев. Америки должен быть использован знаменитый ископаемый лес Иеллоустонского парка, для пермского периода — ископаемые окаменелые пни (*Mesopitys Tchihatchevii*) нашего Кузнецкого бассейна, для каменноугольного — возможные ископаемые пни Донецкого и западноевропейских, как и американских бассейнов.

В частности было бы желательно подметить в олигоценовых и миоценовых лесах Европы, не была ли смещена к западу южная сторона стволов в соответствии с возможным, по Вегенеру, положением северного полюса в северной области Великого океана. С другой стороны, было бы крайне интересно произвести такие же наблюдения на пермских, а также мезозойских стволах Южной Америки, Южной Африки, Индии и Австралии для решения вопроса о взаимном расположении этих стран в то время и об отношении их к странам света.

Сравнительное изучение роста ствола в умеренных широтах и под экватором и тропиками и изучение этих явлений на ископаемых стволах могло бы дать нам возможность ближе подойти к решению проблемы, развивались ли данные растительные формации в средних широтах или близ экватора, где освещение стволов с обеих сторон более или менее равномерно.

Я представляю себе далее, что внимательным изучением поверхностной скульптуры, даже на окаменелых стволах лепидодендрона и сигиллярий на разных сторонах, если возможно с учетом ветвления, диаметра ствола в разных сечениях, корневой системы и т. п., также можно подойти к определению «ископаемых стран света», предварительно изучив это явление на коре тех деревьев, которые долго сохраняют ее в первичном виде, не образуя пробки и корки (*Populus, Acer Negundo, Platanus* и др.).

Наконец, я может быть захожу слишком далеко, но мне представляется возможным в дальнейшем сделать попытку произвести ориентировку даже стеблей девонских болот в Rhynie в Шотландии, уловив у них некоторые анатомические законности.

Чтобы осуществить рекомендуемым мною методом эту своего рода геодезическую съемку прошлых периодов, я бы рекомендовал принять следующие меры. Прежде всего путем изучения литературы, опросами геологов и запросами на разрабатывающихся угольных копях выяснить местонахождение и распространение ископаемых лесов и отдельных пней в естественном положении (in-situ), в отложениях каменноугольного (Донецкого

басс.), пермского (Кузнецкий), юрского (Сибирь и Дальний Восток), мелового и третичного возраста. Тем временем, следовало бы изучить особенности в строении древесины северной и южной стороны современных деревьев и при участии дендрологов-лесоведов произвести обследование некоторых участков срубленных лесов (сосна, ель, береза, дуб, бук, орех и др.), на севере, в Сибири, в средней полосе и на Кавказе, исследуя одновременно коры этих и других деревьев на северной и южной стороне ствола, ровно как анатомию древесины северной и южной стороны.

После этого должна быть развернута следующая фаза работы и приступлено к изучению ископаемых пней на местах, взятию их образцов, шлифованию срезов и их изучению, как путем измерений, так и анатомическому.

Было бы крайне желательно, чтобы такие же исследования были проведены в ископаемых лесах Германии и Англии, а также Америки и южного полушария, и я считал бы желательным сделать такое предложение на Интернациональном геологическом конгрессе 1932 г. Я убежден, что наш вопрос замолкнувшим ископаемым лесам не останется без ответа, и как священные дубы некогда шептали друидам о судьбах будущего, пусть также ископаемые великаны расскажут нам о прошлом... Правило «nulla dies sine linea» вполне приложимо к ископаемым древесинам. Год за годом, в течение миллионов лет, откладывали они слои древесины, с пермского периода — в виде годичных колец, отражая все разнообразие влиявших условий. Годичные кольца гигантских секвой уже привлекались, как свидетели климатических колебаний (Antevs); по расположению корней ископаемых стволов в Шиффильдсе Sorby еще в 1875 г. делал попытки определить направление господствующих ветров в каменноугольном периоде. Я надеюсь, что ископаемые гиганты дадут нам тот или другой ответ и на наш вопрос о теории Вегенера. Могут возразить на это, что до сих пор вполне определенных черт в строении ствола, которые бы исключительно зависели от его экспозиции, не установлено. Но вопрос, как таковой, почти не изучался, и есть полная возможность, что при внимательном подходе к материалу, при разработке его во всеоружии современной научной техники, могут быть уловлены такие признаки, на которые до сих пор или вовсе не обращали внимания или которые ускользали от нашего наблюдения. Толщина стенок клеток, характер трахеид и их скульптура, распределение смоляных ходов и т. п., все это, как многие другие черты гистологии древесной ткани, должно быть подвергнуто детальнейшему изучению, которое должно быть обращено как на первые, так и на последние годичные слои данного сечения ствола.

Я считаю своевременным теперь же поставить перед геологами, палеонтологами и биологами, такую задачу: выяснить, какие образования и явления, наблюдаемые в ископаемом состоянии или в современной природе, но могущие сохраняться и в ископаемом виде, могли бы служить для определения направления стран света, соответствующего времени возникновения этих явлений (напр. явления выветривания, шлифовки, ориентировки кристаллов в горных породах, роста организмов и пр).

Кроме того следовало бы поставить, как обязательное правило, чтобы ни один ископаемый ствол, сохранившийся in situ, или его срез, не извлекался без того, чтобы не была предварительно определена, с отметкой на самом образце, его ориентировка относительно стран света, а также его положение в связи с условиями залегания самой породы, распространение его корневой системы и пр.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ПОЯСАХ УГЛЕОБРАЗОВАНИЯ В КАМЕННОУГОЛЬНОМ ПЕРИОДЕ И О ВОЗМОЖНОСТИ ИХ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Н. КРИШТОФОВИЧА

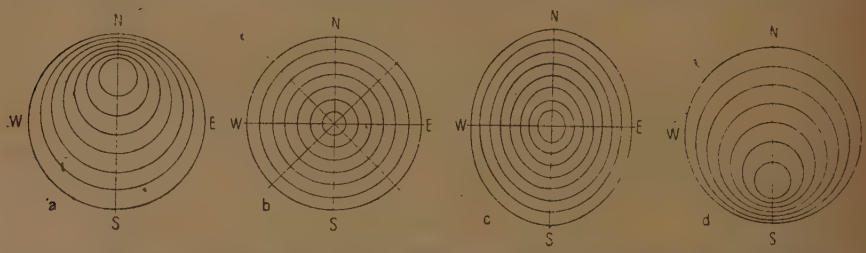
(*Представлено академиком* А. А. Борисяком)

Всеми признано, что отложения угля каменноугольного периода, образовались в поясе влажного леса, но мнения далеко не совпадают — считать ли этот пояс расположенным в тропической зоне или под средними широтами. Находки торфяников на Суматре и пр. показали, что торф может образоваться и в низких широтах, но это обстоятельство еще не решает само по себе вопроса. Один из виднейших представителей современной палеоботаники, проф. В. Готан, считает все каменноугольные залежи образовавшимися в средних широтах, и это обстоятельство служит ему одним из аргументов против теории Вегенера, которая располагает большинство известных каменноугольных бассейнов в тропической зоне, помещая к северу и югу от них пустынные и засушливые образования с залежами гипса, каменной соли и т. п. (1). Несмотря на громадное внимание, которое посвящено этому вопросу заграницей, он остается до сих пор неразрешенным, и сторонники обоих взглядов продолжают отстаивать свои положения (2).

Мне кажется возможным определить географическое положение пояса углеобразования (как в карбоне, так и в более поздние эпохи), пользуясь тем методом, какой мною предложен (3) для определения стран света в геологическом прошлом, т. е. путем измерения и изучения древесин ископаемых стволов. При этом я считаю отправной ту точку зрения, что ствол в своем строении древесины отражает свою ориентировку к странам света и таким образом позволяет определить направление севера и юга. Для определения

положения зоны углеобразования я предполагаю возможным, основываясь на том же материале, даже подходить к определению широты, что может быть сделано вдвойне успешно, если работа по изучению ископаемых лесов наметит нам точки полюсов. При этом конечно я принимаю, что предлагаемая мною методика будет проведена на современном материале. При этом важно отметить, что для работы по изучению вопроса о географическом положении зоны углеобразования далеко не требуется тот первоклассный ископаемый материал, как настоящие ископаемые леса in situ, а вполне достаточно иметь участки окаменелых стволов, сохранившиеся в любом положении.

Анатомически уже было установлено, что является исходным пунктом для моей первой статьи, что «северная древесина» имеет отличие от «южной», что конечно является не только прямым следствием освещения ствола с юга в наших широтах, но в гораздо большей степени функцией более пышного развития кроны с южной стороны и пр. Далее я рассуждаю следующим образом. У деревьев, растущих под высокими и средними широтами обоих полушарий, строение южной и северной половины ствола будет неодинаково (фиг. 1), и представим, что сторона, обращенная к солнцу, будет развита сильнее, южная у нас (*a*), северная — в южном полушарии (*d*). Известно, что у нас в лесах по коре легко определить положение стран света, так как северная сторона ствола всегда бывает темнее, более поросшая мохом, лишаями, влажнее, а южная — светлее, чище и т. п. По мере приближения к экватору эта разница в освещении северной и южной стороны должна постепенно сглаживаться и наконец, в экваториальной полосе, где солнце попеременно освещает то северную, то южную сторону ствола, или стоит в зените, различие между северной и южной стороной, должно постепенно изглаживаться, и стволы получаться или совершенно концентрическими или с бесчисленным количеством осей симметрии (*b*), или же северная и южная



Фиг. 1. Схематический поперечный разрез древесных стволов умеренных широт северного (*a*) и южного (*d*) полушарий и тропической зоны (*b*—*c*).

стороны, будучи одинаковы между собой, будут иметь некоторые отличия от западной и восточной стороны, т. е. ствол будет иметь две плоскости симметрии (*c*). Ствол средних широт южного полушария будет устроен как раз обратно, чем такой северного (*d*).

Я не имел пока возможности выяснить, в какой степени рост стволов деревьев связан морфологически и анатомически с широтами, и в частности, насколько изучено распределение древесины в стволах тропического пояса. Если бы вопрос о живом материале был ясен, то работу можно было бы начать почти непосредственно с изучения ископаемого материала. Но вероятнее, что современная литература в этом отношении может дать еще очень немного, и сравнительное изучение роста стволов в высоких, средних и низких широтах нужно будет провести самостоятельно как в морфологическом, так частью и в анатомическом отношениях.

Для тропических древесин я бы указал как на подходящий материал, на хвойные породы горных областей (напр. сосны *Pinus insularis* Филиппин), мангрововые леса и деревья тропического леса с более быстрым ростом древесины. Имея эти результаты, т. е. владея методой отличения древесины высоких широт от низких, можно приступить и к изучению ископаемых древесин возможно более обширной области, захватывая Шпицберген, Н. Землю, Туркестан, Кавказ, не говоря уже конечно о стволах Донецкого, Кузнецкого и Минусинского бассейнов.

Уже теперь можно думать, что эти исследования могли бы иметь значение для выделения возможных наших латеритных (т. е. бокситовых) районов и т. п. И эту работу целесообразнее всего было бы вести одновременно в различных странах обоих полушарий.

21 XI 1931

ЛИТЕРАТУРА

1. Köppen und Wegener. Die Klimate der geologischen Vorzeit. 1924.
2. W. Zimmermann. Die Phylogenie der Pflanzen. 1930.
3. А. Криштофович. Ископаемые леса, как указатели положения стран света в геологическом прошлом и теория Вегенера. ИМЕН, 1932, стр. 409.

Оглавление — Sommaire

	стр.
Г. А. Надсон, Н. Н. Иванов, М. П. Корсакова и С. Д. Львова. Сергей Павлович Костычев. 1877—1931. Некролог (с портретом)	287
И. М. Виноградов. О числе целых точек внутри круга	313
*В. И. Смирнов. О формулах Коши и Грина и некоторых вопросах, к ним относящихся (с резюме на русском языке)	337
Б. В. Нумеров. Сокращенная формула многозначных таблиц логарифмов чисел	373
В. Г. Хлопин и М. А. Пасвик-Хлопина. Определение атомного веса калия, выделенного из гороха	381
А. А. Рихтер и А. И. Гречушников. К вопросу о физиологических процессах, лежащих в основе гибели озимых хлебов от „выпревания" или „задушения" под ледяной коркой	391
А. Н. Криштофович. Ископаемые леса как указатели положения стран света в геологическом прошлом и теория Вегенера (с 1 фиг.)	409
—— К вопросу о поясах углеобразования в каменноугольном периоде и о возможности их непосредственного определения (с 1 фиг.)	415

	pag.
*G. Nadson, N. Ivanov, M. Korsakova et S. Lvov. S. Kostyčev. 1877—1931. Notice nécrologique (avec un portrait)	287
*I. Vinogradov (I. Vinogradoff). Sur le nombre des points entiers à l'intérieur d'un cercle	313
V. Smirnov (V. Smirnoff). Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent (avec un résumé en russe)	337
*B. Numerov. Forme abrégée des tables des logarithmes à un grand nombre de décimales	373
*V. Chlopin et, M. Pasvik-Chlopina. Le poids atomique de potassium extrait des grains de pois	381
*A. Richter et A. Grečušnikov. Sur les procéssus physiologiques motivant la perte des céréales d'hiver sous la croûte glaciale	391
*A. Kryštofovič (A. Kryshtofovich). Les bois fossiles comme indicateurs des points cardinaux dans la passé géologique et la théorie de Wegener (avec 1 fig.)	409
*—— A propos des zones de formations des houilles pendant la période carbonifère et la possibilité de leur détermination directe (avec 1 fig.).	415

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.